

# グラフにおける minimax, maximin, maximum, minimum 点

——廃棄物処理施設の建設地点に関する考察——

鈴木 啓 祐

## I 序

グラフ理論によって、経路に関する研究が大きく発展させられた。実際、グラフ理論によって、グラフの構造上の特性や、グラフの内部にある特定の点のもつ性質等が明らかにされてきた。

私は、グラフを用いて、廃棄物処理施設の位置の考察を行なっているとき、きわめて興味ある結果を見いだした。すなわち、私が、追加グラフと名づける特別のグラフにおいて、minimax 点, maximin 点, maximum 点, および minimum 点と呼び得るような点が存在することが見いだされた。ここでは、この結果について報告したい。

なお、ここでは、私の見いだした結果の特徴が明確になるように、その結果を述べる前に、これまでに得られている経路の問題に関係のあるいくつかのグラフの特性を示す指標、ならびに、グラフ内の特定の性質をもつ点について述べることにする。

## II グラフの特性を示す諸指標

グラフ理論においては、すでに、グラフに関する多くの指標が提案されている。ここでは、それらの指標について概観することにする<sup>1)</sup>。

### (1) サイクロマティック数

グラフ (graph) は、いうまでもなく、点 (vertex, node) と線 (edge, route) とからなる図形であるが、点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  があるとき、そのうちのある 1 点  $v_i$  から出ている線に沿って移動して行き、逆方向に進むことなくふたたびその点  $v_i$  に帰ってくるができるとき、

移動経路となった 1 組の環状の線をサイクル (cycle) という。サイクロマティック数 (cyclomatic number)  $\mu$  は、グラフの中に見いだされるサイクルの個数であり、

$$\mu = m - n + p \quad (2.1)$$

によって定義される。ただし、 $m$  は、線の個数、 $n$  は点の個数、 $p$  は、コンポーネント (component) ——孤立した 1 点、あるいは、点が線で連結されてできた 1 個以上のグラフの部分があるとき、その各部分をそのグラフのコンポーネントという——の個数である。

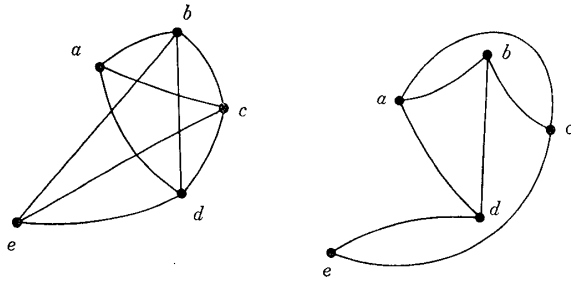
### (2) $\alpha$ 指標

$\alpha$  指標 ( $\alpha$  index) は、サイクロマティック数を用いて算出したグラフの辺の数に関する指標であり、

$$\alpha = \frac{\nu}{\nu_{\max}} \quad (2.2)$$

で示される。ただし、 $\nu$  はグラフのもつサイクロマティック数、 $\nu_{\max}$  は、点の数とその位置は不変にしておき、辺の数を増加させて行ったとき、可能な最大サイクロマティック数である。

ところで、 $\nu_{\max}$  は、グラフの種類によって異なった値をとる。グラフには、(I) 点の間を結ぶ線が互いに交わるような非平面グラフ、あるいは、非プラナー・グラフ (non-planar graph)<sup>2)</sup> と、点の間を結ぶ線が決して互いに交わらないような平面グラフ、あるいは、プラナー・グラフ (planar graph) とがある (第 1 図)。非平面グラフでは、最大の線の個数が、 $n(n-1)/2$ 、平面グラフのそれは、 $3n-6$  であるから、非平面グラフの  $\alpha$  は、



(I) 非平面グラフ (II) 平面グラフ  
第1図 非平面グラフと平面グラフ

$$\alpha = \frac{2(m-n+p)}{(n-1)(n-2)} \quad (2.3)$$

平面グラフのそれは、

$$\alpha = \frac{m-n+p}{2n-5} \quad (2.4)$$

である。

いま、点を個人あるいは都市、線をそれらを結ぶ経路とすると、この値が大きいことは、各個人、あるいは、都市を結ぶ経路が十分に用意されていることを示す。

(3)  $\beta$  指標、

$\beta$  指標 ( $\beta$  index) は、点の個数に対する線の個数の大きさを示す指標であり、

$$\beta = \frac{m}{n} \quad (2.5)$$

で示される。

(4)  $\gamma$  指標

$\gamma$  指標 ( $\gamma$  index) は、線の個数に関する指標である。すなわち、

$$\gamma = \frac{m}{m_{\max}} \quad (2.6)$$

によって定義される。ただし、 $m_{\max}$  とは、最大の線の個数である。したがって、非平面グラフでは、

$$\gamma = \frac{2m}{n(n-1)} \quad (2.7)$$

であり、平面グラフでは、

$$\gamma = \frac{m}{3(n-2)} \quad (2.8)$$

である。

(5)  $\pi$  指標

$\pi$  指標 ( $\pi$  index) は、線の長さの総和 (総延長)  $C$  をグラフの直径  $d$ ——2点間の最短経路における線の長さの総和——で割った値である。すなわち、

$$\pi = \frac{C}{d} \quad (2.9)$$

である<sup>2)</sup>。

(6) 近接数

近接数 (associated number)<sup>3)</sup> とは、グラフの各点に対して与えられる値であり、たとえば、点  $v_i$  の近接数とは、点  $v_i$  と、それ以外の点  $v_j$  ( $j=1, 2, \dots; j \neq i$ ) とを結ぶ線の個数のうち最大の数である。いま、点  $v_i$  に対するこの数を  $A(v_i)$  で示せば、

$$A(v_i) = \max_j d_{ij} \quad (2.10)$$

である。ただし、 $d_{ij}$  とは、点  $v_i, v_j$  間を結ぶ線の個数である。この数が大きいほど、グラフは、多くの線からなり立っていることになる。

(7) 連結度

連結度 (degree of connectivity)<sup>4)</sup> とは、グラフの点を結ぶ線がどれ程多く与えられているかを示す指標である。

非平面グラフでは、 $v$  個の点があるとき、与えられ得る線の最大の個数  $e_{\max}$  は、

$$e_{\max} = \frac{v(v-1)}{2} \quad (2.11)$$

である。連結度  $d.c.$  は、実際に与えられた線の個数  $e$  が、この値にどれ程近いかを示す値であり、

$$d.c. = \frac{\frac{v(v-1)}{2}}{e} \quad (2.12)$$

によって与えられる。

(8)  $\theta$  指標

これまでの指標は、すべて、グラフの点や線の個数についての指標であった。これらに対して最後の指標  $u$  以外の以下に挙げる諸指標は、すべて、線の長さやその特性と点あるいは線の個数やその特性との間の関係を示す指標である。

$\theta$  指標 (theta index) は, カンスキー (K. J. Kansky) によれば, つぎのように定義される値である。すなわち, 第1の定義によれば,

$$\theta = \frac{T}{v} \quad (2.13)$$

であり, 第2の定義によれば,

$$\theta = \frac{M}{v} \quad (2.14)$$

である。ただし,  $T$  は, グラフの線が道路を示しているとみなし, そのグラフ内の総交通量 (total traffic flow) あるいは, 総輸送量 (total volume of freight carried) であり, また,  $M$  は, 線の長さの総和 (total milage of the network) であり,  $v$  は, 点の数である。

式 (2.13) によって定義される  $\theta$  は, 点1個あたりの機能の大きさを示す指標であり, 式 (2.14) によって定義される  $\theta$  は, 点1個あたりの線の長さを示す指標であるとみなされる<sup>5)</sup>。

(9)  $\iota$  指標

$\iota$  指標 (iota measure) も2種の定義があり, その第1は,

$$\iota = \frac{M}{w} \quad (2.15)$$

であり, その第2は,

$$\iota = \frac{M}{T} \quad (2.16)$$

である。ただし,  $M$ , および  $T$  は, 式 (2.13) および (2.14) の  $M$  と同様の値であり,  $w$  は, 機能の大きさで重みをつけられた点の個数である。

したがって, 式 (2.15) および (2.16) は, 交通網における一種の交通密度を示す指標であり, 特に, 式 (2.16) は, 線 (経路あるいは, 道路) の長さ1単位あたりの交通密度の逆数である<sup>6)</sup>。

(10)  $\eta$  指標

$\eta$  指標 (eta index) は,

$$\eta = \frac{M}{e} \quad (2.17)$$

によって定義される  $\eta$  である。ただし,  $M$  は  $\iota$

指標における  $M$  と同じのものであり,  $e$  は, 線の数である。

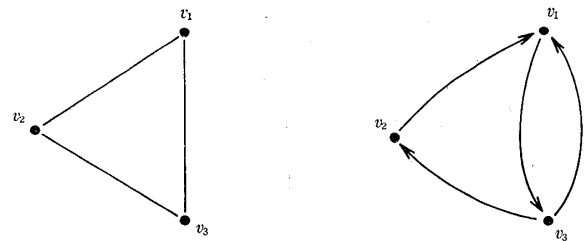
この指標は, 線1個あたりの線の長さであるといえる<sup>7)</sup>。

(11) 指標  $u$

グラフの構造は隣接行列 (adjacency matrix) によっても示される。隣接行列によってグラフの構造を示す場合にも, グラフは2種に分けられる。それらのグラフは, 無向グラフと有向グラフである。

無向グラフ (undirected graph, nonoriented graph) とは, グラフの線を道路とみなしたとき, 一般に, 点  $v_i$  から  $v_j$  ( $i, j=1, 2, \dots$ ) へ行くこともでき,  $v_j$  から  $v_i$  へ行くこともできるグラフである。有向グラフ (directed graph, oriented graph) とは, グラフの線を, やはり道路とみなしたとき, ある一定の方向へのみ行くことの許されるグラフである。

たとえば, 第2図の (A) は無向グラフ, (B) は有向グラフである。



(A) (B)  
第2図 無向グラフと有向グラフ

隣接行列は, 無向グラフ, あるいは, 有向グラフの点の線による結合を1, 非結合を0で示した行列である。すなわち, 無向グラフにおいて, 点  $v_i$  と点  $v_j$  とを結ぶ線があることを,  $x_{ij}=x_{ji}=1$  によって (ただし,  $x_{ij}$  は行列の第  $i$  行第  $j$  列の要素である), この線のないことを,  $x_{ij}=x_{ji}=0$  によって示す。また, 有向グラフにおいて, 点  $v_i$  から  $v_j$  へ向う線があることを  $x_{ij}=1$  によって示す。いま, 第2図 (A) の隣接グラフを作ってみると,

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.18)$$

となる。この図の (B) に対しては、

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.19)$$

という隣接グラフができる<sup>8)</sup>。

隣接行列には興味ある性質がある。隣接行列の行の和は、その行によって示される点と直接に結ばれる点の個数である。たとえば、式 (2.18) においては、各行の和は、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \quad (2.20)$$

のように、すべて2となり、各点は、それぞれ他の2つの点と直接連結する線をもっていることが示される。

次いで、この行列を2乗すると、 $x_{ij}$  の値は点 $v_i$  から  $v_j$  まで2辺を通過して行ける経路の種類数を示す値となる。実際、式 (2.19) および式 (2.20) の2乗は、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

となり、第2図 (A) では、たとえば、 $v_1$  から  $v_3$  へ2本の線を通って行く方法が1通りあるが、第2図 (B) では、そのような方法がないことが知られる<sup>9)</sup>。

いま、グラフの直径 (diameter) (2点間の最短経路の中で辺の数の最大となる経路の辺の数を  $n$  とするとき、

$$C = \sum_{p=1}^n X^p \quad (2.23)$$

で定義される行列  $C$  を算出してみる。ただし、

$X$  は、隣接行列である。このとき、 $C$  は、一般に、

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2s} \\ \vdots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} \cdots c_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

で示される。ただし、 $s$  は点の総数である。式 (2.24) の行の合計値を  $c_1, c_2, \dots, c_s$  としたとき、これらのうちの最大値  $\max(c_i)$  および最小値  $\min(c_i)$  を  $\max(c_i)$  で除した値を指標  $u$  とすれば、

$$u = \frac{\max(c_i) - \min(c_i)}{\max(c_i)} \quad (2.25)$$

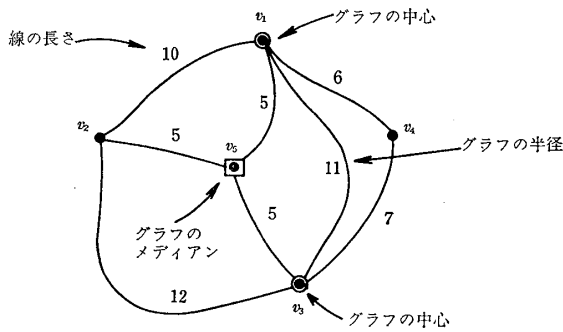
となる。グラフ内の線は、均質に与えられたとき、この値が小さくなり不均質に与えられたとき (すなわち、ある点には多くの線が、また、ある点には少数の線が与えられているようなとき) には、 $u$  が大きくなる<sup>10)</sup>。したがって、この指標  $u$  は、グラフの均質性に関する指標とみなすことができる。

### III グラフにおける特定点

II では、これまでに提唱されたグラフの特徴を示す諸指標について述べたが、ここでは、やはり、これまでに提唱された、グラフにおいて見いだされる特定の性質をもった種々の点——これを特定点 (specified point, spezifische Punkt) と名づけることにする——について述べることにする。この論文で提唱する追加グラフにおける各種の点は、この節で述べる特定点と比較をすることによって、それらの特徴がより明確にされるであろう。

#### (1) グラフの中心

いま、たとえば、第3図における点  $v_1, v_2, \dots, v_5$  に、それぞれ、1人ずつ人が住んでいて、これらの人々に、共通に必要な施設、たとえば、郵便局を、 $v_1, v_2, \dots, v_5$  のうちのいずれか1つの場所に設置しようとしていると仮定しよう。この郵便局の位置は、すべての人々にとって近いことが望ましいが、そのようなことは望み得ない。したがって、このような場



第3図 人口分布のグラフならびにその中心とメディアン

合、郵便局の位置はそこから最も遠くに住んでいる人にできるだけ近くなるように決められることが望ましいと考えられるべきである。すなわち、ここでは、距離に関してミニマックス (minimax) の実現する点が望ましい点となる。このミニマックス点は、式 (3.1) を用いて、つぎのような手順によって得られる。ただし、式 (3.1) では、点  $v_i$  から  $v_j$  までの最短経路の距離  $d_{ij}$  (第3図に書かれた線の長さによって得られる値) が  $v_i$  行  $v_j$  列の欄に書かれている。

**手順1** 式 (3.1) の各行において最大の値を示す数字を太字にする。式 (3.1) には、すでにその太字が書かれている。

$$\begin{matrix} & v_1^* & v_2 & v_3^* & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1^* \\ v_2 \\ v_3^* \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10^* & 6 & 5 \\ 10 & 0 & 10 & \mathbf{16} & 5 \\ 10^* & 10 & 0 & 7 & 5 \\ 6 & \mathbf{16} & 7 & 0 & 11 \\ 5 & 5 & 5 & \mathbf{11} & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (3.1)$$

**手順2** 太字の数字のうち最小の値をみいだす。ここでは、10である。

**手順3** その最小の値の欄の行と列の点  $v_i^*$ ,  $v_j^*$  をグラフのミニマックス点とする。そして、この点をグラフの中心 (center) という。ここでは、10を示す欄 (\*印のある欄) の行と列の点、すなわち、点  $v_1$  と点  $v_3$  である。また、その最小の値をグラフの半径 (radius) という。ここでは10である。

したがって、一般に、グラフの半径は、

$$d_{ij}^* = \min_i \max_j d_{ij} \quad (3.2)$$

で定義される  $d_{ij}^*$  であるといえる。そして、グラフの中心 (center) は、この  $d_{ij}^*$  をもつ点  $v_i^*$  および  $v_j^*$  であるといえる<sup>11)</sup>。

(2) グラフのメディアン

グラフの中心に対して、グラフのメディアン (median) という特定点がある。この点は、すべての点からの距離の総和  $S (= \sum_{j=1}^N d_{ij})$  —— 一般に、すべての点 ( $N$  はその総個数) からある点  $v_i$  までの距離の総和を点  $v_i$  のシンベル指標 (Simbel index) という —— が最小となる点である。すなわち、 $S$  の値が、

$$S^* = \min_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (3.3)$$

で定義される  $S^*$  となる点  $v_i$  である。

いま、式 (3.1) のような各地点間の最短経路の距離を示したマトリクスが与えられたとき、グラフのメディアンは、つぎのような簡単な手順で得ることができる。

**手順1** 各行の要素の値の総和を算出する。

**手順2** その総和のうちの最小の値を見いだし、その値をもつ行の点  $v_i^*$  をグラフのメディアンとする。

実際、式 (3.1) の各行の総和は、下記のマトリクスの右端に書かれたような値となる。

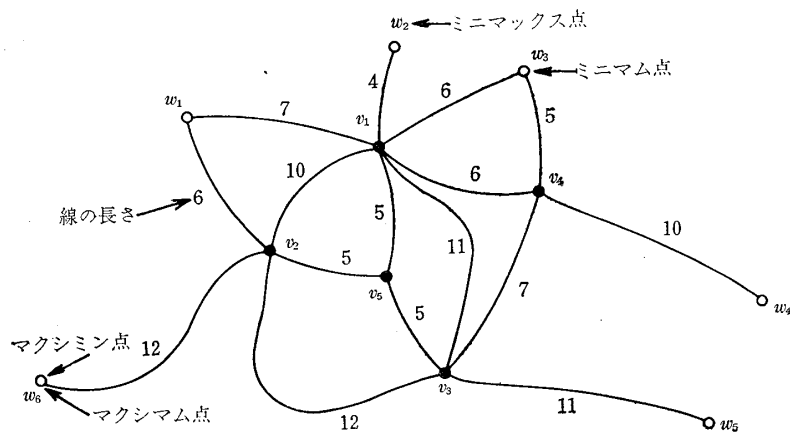
$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 0 & 10 & 16 & 5 \\ 10 & 10 & 0 & 7 & 5 \\ 6 & 16 & 7 & 0 & 11 \\ 5 & 5 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 31 \\ 41 \\ 32 \\ 40 \\ 26^* \end{matrix} \quad (3.4)$$

したがって、ここでのグラフのメディアンは、これらの総和の最小値26 (\*印が付けられている) を示す点  $v_5$  である<sup>12)</sup>。

IV 追加グラフとこれに関係する諸点

(1) 追加グラフのミニマックス点

IIIで述べた特定点、すなわち、グラフの特定点は、すべて、点  $v_i (i=1, 2, \dots, N)$  の上に決められている。しかし、私は、これ以外に、これらと同様に興味ある特定点が得られることを見いだした。



第4図 追加グラフおよび追加グラフのミニマックス点, マクシミン点, マキシマム点, およびミニマム点

いま, まず, 与えられたグラフの各点には, それぞれ, 1人ずつ人が住んでいると仮定する。たとえば, 第4図の黒い点とそれを結ぶ線があらかじめ与えられたグラフであるとする。したがって, これらの黒い点には, それぞれ, 1人ずつ人が住んでいるのである。そして, このようなグラフを基本グラフ (basic graph) と名づけることにする。次いで, 人の住まない点と, その点から基本グラフの点に向う線とを, この基本グラフに追加的に与える。このとき与えられる新しい点を追加点 (added vertex)——基本グラフの点は基本点 (basic vertex) と名づけることにする——と名づけ, この追加点と新たに追加された線 (追加線 added edge)——基本グラフの線は基本線 (basic line) と名づけることにする——と基本グラフとを合わせたグラフを追加グラフ (augmented graph) と名づけることにする。追加点は, 公共の施設, たとえば, 博物館, 危険物保管所, あるいは, 集会場等を建設するための候補地であり, この地点は, 個人が住めない場所であると仮定する。

もし, 建設しようとする公共施設が博物館のようなものであれば, これは, 基本グラフにおける各点  $v_i (i=1, 2, \dots, M)$  にできるだけ近い場所 (追加点) に建設されるべきである。いいかえれば, 博物館は, そこから最も遠くに住んでいる人に, できるだけ近くなるように, ——すなわち, 追加点から基本グラフの点までの距離をミニマックスとする追加点に——建て

られるべきである。いま, 追加点  $w_j (j=1, 2, \dots, N)$  から基本点  $v_i$  までの距離 (最短経路の長さ) を  $d_{ji}$  で示せば,  $d_{ji}$  のうち, その値が,

$$d_{ji}^* = \min_j \max_i d_{ji} \quad (4.1)$$

で定義される  $d_{ji}^*$  となるような点  $w_j^*$  が上記の条件を満足する点であるといえる。この点  $w_i^*$  を追加グラフのミニマックス点 (minimax point in an augmented graph) と名づける。

第4図の追加グラフのミニマックス点は, つぎのような手順によって得られたものである。

手順1  $w_j (j=1, 2, \dots, N)$  を行とし,  $v_i (i=1, 2, \dots, M)$  を列とする  $d_{ji}$  の行列をつくる。ここでは,  $M=5, N=6$  であるから,

$$\begin{matrix}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
 w_1 & 7 & 6 & 16 & 13 & 11 \\
 w_2^* & 4 & 14^* & 14 & 10 & 9 \\
 w_3 & 6 & 16 & 12 & 5 & 11 \\
 w_4 & 16 & 26 & 17 & 10 & 21 \\
 w_5 & 21 & 21 & 11 & 18 & 16 \\
 w_6 & 22 & 12 & 22 & 28 & 17
 \end{matrix} \quad (4.2)$$

となる。実際には, この段階では, この式中の太字や\*は, まだ書かれていない。

手順2 各行の最大の値を太字にする。式(4.2)の太字は, この太字である。

手順3 太字の値の最小の値に\*印を与える。この\*印の付けられた「行の点」を追加グラフのミニマックス点とする。

この方法は, ゲームの理論 (game theory) に

において、 $N$ 種の戦略 (strategy) を持った人がミニマックス戦略 (minimax strategy)<sup>13)</sup>を用いてその人の戦略を決定する方法とまったく同じである。

(2) 追加グラフのマクシミン点

建設しようとする公共施設が危険物保管所のようなものであれば、これは、基本グラフにおける各点にできるだけ遠い場所 (追加点) に建設されるべきである。いいかえれば、危険物保管所は、そこから最も近くに住んでいる人に、できるだけ遠くなるように——すなわち、追加点から基本グラフの点までの距離をマクシミンとする追加点に——建てられるべきである。いま、距離  $d_{ji}$  を用いてこの点を定義すれば、追加グラフのマクシミン点 (maximin point in a augmented graph) とは、 $d_{ji}$  が

$$d_{ji}^{**} = \max_j \min_i d_{ji} \quad (4.3)$$

で定義される  $d_{ji}^{**}$  となる点  $w_j^{**}$  である。

第4図の追加グラフにおけるマクシミン点は、つぎのような手順によって得られる。

手順1  $w_j (j=1, 2, \dots, N)$  を行とし、 $v_i (i=1, 2, \dots, Q)$  を列とする  $d_{ji}$  の行列をつくる。ここでは、その行列は、式(4.2)と同様に、

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ w_1 & 7 & 6 & 16 & 13 & 11 \\ w_2 & 4 & 14 & 14 & 10 & 9 \\ w_3 & 6 & 16 & 12 & 5 & 11 \\ w_4 & 16 & 26 & 17 & 10 & 21 \\ w_5 & 21 & 21 & 11 & 18 & 16 \\ w_6^{**} & 22 & 12^{**} & 22 & 28 & 17 \end{matrix} \quad (4.4)$$

となる。

手順2 各行の最小の値を太字にする。式(4.4)の太字は、この太字である。

手順3 太字の値の最大の値に\*\*印を付ける。この\*\*印の付けられた行の点  $w_j^{**}$  を追加グラフにおけるマクシミン点とする。第3図においては、点  $w_6$  がこの点となる。

(3) 追加グラフのマキシマム点

追加グラフのマキシマム点 (maximum point in an augmented graph) とは、追加点から基本

グラフの各点までの距離の総和を最大にさせる追加点  $w_j^*$  である。このような点は、集会場のような公共施設を建設するためには最も悪い地点であるとみなされる。

この点を  $d_{ji}$  を用いて定義すると、この点は、

$$S^* = \max_j \sum_{i=1}^M d_{ji} \quad (4.5)$$

で定義される値  $S^*$  をもつ追加点  $w_j^*$  であるといえる。

また、この点は、下記のような手順で決定される。

手順1  $w_j (j=1, 2, \dots, N)$  を行とし、 $v_i (i=1, 2, \dots, M)$  を列とする  $d_{ji}$  の行列をつくる。第4図では、式(4.2)、(4.3)と同様に、

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ w_1 & 7 & 6 & 16 & 13 & 11 \\ w_2 & 4 & 14 & 14 & 10 & 9 \\ w_3^{**} & 6 & 16 & 12 & 5 & 11 \\ w_4 & 16 & 26 & 17 & 10 & 21 \\ w_5 & 21 & 21 & 11 & 18 & 16 \\ w_6^* & 22 & 12 & 22 & 28 & 17 \end{matrix} \begin{matrix} 53 \\ 51 \\ 50^{**} \\ 90 \\ 87 \\ 101^* \end{matrix} \quad (4.6)$$

手順2 各行の  $d_{ji}$  の合計を計算する。式(4.6)の右端の数字がこの式におけるその合計である。

手順3 合計を示す値のうち、最大のものを見だし、その値をもつ行の追加点  $w_j^*$  をマキシマム点とする。第4図においては、 $w_6$  がマキシマム点となる。

(4) 追加グラフのミニマム点

集会場のような公共施設に適した点としては、追加点から、基本グラフの各点までの距離の総和が最小となるような追加点が望ましいといえよう。このような点が追加グラフのミニマム点 (mimumum point in an augmented graph) である。

この点を  $d_{ji}$  を用いて定義すると、この点は、

$$S^{**} = \min_j \sum_{i=1}^M d_{ji} \quad (4.7)$$

で与えられる値  $S^{**}$  をもつ追加点  $w_j^{**}$  であるといえる。

また、この点は、つぎのような手順で決定さ

れる。

手順1  $w_j (j=1, 2, \dots, N)$  を行とし,  $v_i (i=1, 2, \dots, M)$  を列とする  $d_{ij}$  の行列をつくる。第4図では, 式(4.6)のようになる。

手順2 各行の  $d_{ji}$  の合計を計算する。式(4.6)の右端の数字が, この式におけるその合計である。

手順3 合計を示す値のうち, 最小のものを見だし, その値をもつ行の追加点  $w_j^{**}$  をミニマム点とする。第4図においては,  $w_3$  がミニマム点となる。

(5) 追加点の不均質性

式(4.6)の  $d_{ji}$  の行の和を見てみよう。 $w_1, w_2, w_3$  の行の和は, 互いに近い値をもち,  $w_4, w_5, w_6$  のそれもまた, 互いに近い値をもっている。しかし, 前者と後者の間には, 大きな差が見られる。このことから,  $w_1, w_2, w_3$  あるいは,  $w_4, w_5, w_6$  は, それぞれ, 基本グラフに対して類似した性質をもっているが, これら全体は基本グラフに対して必ずしも類似した性質をもっているとはいえない。すなわち, もし, 追加点が,  $w_1, w_2, w_3$ , あるいは  $w_4, w_5, w_6$  のみであれば, 追加点は均質であるといえるが, たとえば, 追加点が,  $w_1, w_2, w_6$  であれば, 追加点は, 不均質であることになる。このような事実を定量的に示すために, 追加点の不均質係数  $H$  (coefficient of heterogeneity of augmented points) という値を定義することにする。この値は,

$$H = \frac{(S^* - S^{**})}{\frac{1}{2}(S^* + S^{**})} = \frac{2(S^* - S^{**})}{S^* + S^{**}} (\geq 0) \quad (4.8)$$

によって示される。ただし,  $S^*$  および  $S^{**}$  である。この  $H$  が小さいときは, マキシマム点とミニマム点の  $\sum_{i=1}^M d_{ji}$  の値に大きな差異がないことを示しているといえる。いいかえれば,  $H$  がごく小さいときは, マキシマム点とミニマム点との差異がほとんどなく, たとえば, 公共施設の建設地として, 後者のかわりに前者を代

用することが可能であるといえよう。

第4図の  $H$  は,

$$H = \frac{2(101-50)}{101+50} = 0.675 \quad (4.9)$$

である。しかし, もし,  $w_1, w_2, w_3$  のみが追加点であれば,

$$H = \frac{2(53-50)}{53+50} = 0.058 \quad (4.10)$$

$w_4, w_5, w_6$  のみが追加点であれば,

$$H = \frac{2(101-87)}{101+87} = 0.149 \quad (4.11)$$

となり,  $w_1, w_2, w_3$  のみが追加点であるときは, 集会場を, これらのいずれの追加点に建設しても, 基本グラフの各点に住む人々に対してあまり不便さの差を感じさせないであろう。

(6) 双対追加グラフ

ある1つの追加グラフがあり, その基本グラフの点  $v_i$  を追加点とし, その追加点  $w_j$  を基本グラフの点としたグラフ(線の位置は不変にしておく)が得られるときそのグラフを, ある1つの追加グラフに対する双対追加グラフ(dual augmented graph)と名づけることにする。このグラフのミニマックス点, マキシミン点, マキシマム点, ミニマム点は, それぞれ, 以下に示される  $d_{ij}^*, d_{ij}^{**}, S^*, S^{**}$  をもつ点  $v_i$  である。

$$d_{ij}^* = \min_i \max_j d_{ij} \quad (4.12)$$

$$d_{ij}^{**} = \max_i \min_j d_{ij} \quad (4.13)$$

$$S^* = \max_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (4.14)$$

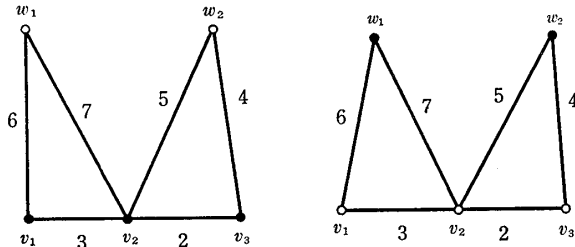
$$S^{**} = \min_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (4.15)$$

となる。

これらのうち, たとえば, 双対追加グラフのミニマム点は, すべての公共施設の建設候補地



に公共施設が建設されたとき、それらの公共施設の管理者が1つの場所で会合しようとする場合、双対追加グラフのミニマム点をその集会の場所にする、すべての管理者の移動する距離の和を最小にすることができる。



(A)追加グラフ

(B)追加グラフ

(注) 線に与えられた数字は線の長さである。また、○が追加点である。

第5図 双対追加グラフ

たとえば、いま、第5図(A)のような追加グラフがあったとしよう。このグラフに対する双対追加グラフは、第5図(B)のようになる。これらのグラフでは、図(A)では線  $(w_1, v_1)$ ,  $(w_1, v_2)$ ,  $(w_2, v_2)$ ,  $(w_2, v_3)$  が追加線とみなされ、図(B)では、すべての線が追加線となるであろう。

第5図(A)に対する式(4.2)のような距離  $d_{ij}$  の行列を作ってみると、

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & \left[ \begin{array}{ccc} 6 & 7 & 9 \end{array} \right] \\ w_2 & \left[ \begin{array}{ccc} 8 & 5 & 4 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.9)$$

となり、図(B)に対するそれは、

$$\begin{matrix} & w_1 & w_2 \\ v_1 & \left[ \begin{array}{cc} 6 & 8 \end{array} \right] \\ v_2 & \left[ \begin{array}{cc} 7 & 5 \end{array} \right] \\ v_3 & \left[ \begin{array}{cc} 9 & 4 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (.10)$$

となる。これらの行列から得られる追加グラフのミニマックス点  $P_{\minimax}$ 、マクシミン点  $P_{\maximin}$ 、マキシマム点  $P_{\max}$ 、ミニマム点  $P_{\min}$  は、それぞれ、第1表のようになる<sup>14)</sup>。

第1表 第5図の各種の点

点	図 (A)	図 (B)
$P_{\minimax}$	$w_2$	$v_2$
$P_{\maximin}$	$w_1$	$v_1$
$P_{\max}$	$w_1$	$v_1$
$P_{\min}$	$w_2$	$v_2$

### V 追加グラフおよび双対追加グラフとこれらに関する諸点の数学的表現

#### (1) 追加グラフとその双対追加グラフ

ここで、数学的表現を用いて、基本グラフ、追加グラフ、およびこれに関係をもつ諸点をより一般的に示してみよう。

いま、グラフ  $G^* = (V^*, E^*)$  があり、

$$V^* = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_n) \quad (5.1)$$

$$E^* = (e_1, e_2, \dots, e_t, \dots, e_p, u_1, u_2, \dots, u_s, \dots, u_q) \quad (5.2)$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_m) \quad (5.3)$$

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_n) \quad (5.4)$$

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_t, \dots, e_p) \quad (5.4)$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_s, \dots, u_q) \quad (5.5)$$

であるとする。ただし、 $v_i (i=1, 2, \dots, m)$  は、基本グラフの点、すなわち、基本点、 $w_j (j=1, 2, \dots, n)$  は、追加グラフの点、すなわち、追加点である。また、 $e_t (t=1, 2, \dots, p)$  および  $u_s (s=1, 2, \dots, q)$  は、それぞれ、基本グラフ、および、追加グラフにおける線、すなわち、基本線、および追加線である。したがって、基本グラフ  $G$ 、および追加グラフ  $G^*$  は、それぞれ、

$$G = (V, E) \quad (5.6)$$

$$G^* = (V^*, E^*) = (V, W, E, U) \quad (5.7)$$

によって示される。

式(5.7)で示される追加グラフの双対追加グラフでは、まず、 $W$  を基本点の集合とみなす。この  $W$  を  $V^D$  で示すことにする。また、この集合の要素を、 $v_j^D (j=1, 2, \dots, n)$  で示す。したがって、

$$V^D = (v_1^D, v_2^D, \dots, v_j^D, \dots, v_n^D) \quad (5.8)$$

である。次いで、線  $E^*$  の一部と点  $V^D$  とを用いてできるグラフを構成し、これを双対グラフにおける基本グラフとする。ただし、線  $E^*$  の一部は任意に選定することができることとする。この線の集合を  $E^D$  とし、その要素を  $e^{D_1}, e^{D_2}, \dots, e^{D_g}, \dots, e^{D_h}$  とする。すなわち、

$$E^D = (e^{D_1}, e^{D_2}, \dots, e^{D_g}, \dots, e^{D_h}) \quad (5.9)$$

である。

このようにして、双対追加グラフの基本点と基本線とを決定すれば、グラフ  $G^*$  の双対追加グラフの基本グラフ  $G^D$  は、

$$G^D = (V^D, E^D) \quad (5.10)$$

となる。

したがって、双対追加グラフの追加グラフ  $G^{D*}$  は、 $V$  を追加点（双対追加グラフの追加点） $W^D$ 、グラフ  $G^*$  のもつ線全体  $E$  および  $U$  から  $E^D$  とみなされた線を除いた線を追加線（双対追加グラフの追加線） $U^D$  とし、この  $U^D$  の要素を、 $u^{D_r} (r=1, 2, \dots, k)$ 、したがって、

$$U^D = (u^{D_1}, u^{D_2}, \dots, u^{D_r}, \dots, u^{D_k}) \quad (5.11)$$

としたグラフである。

また、グラフ  $G^*$  の双対追加グラフ  $G^{D*} = (V^{D*}, E^{D*})$  の要素を、式 (5.1)~(5.5) のような形で書くと、

$$V^{D*} = (v^{D_1}, v^{D_2}, \dots, v^{D_j}, \dots, v^{D_n}, w^{D_1}, w^{D_2}, \dots, w^{D_i}, \dots, w^{D_m}) \quad (5.12)$$

$$E^{D*} = (e^{D_1}, e^{D_2}, \dots, e^{D_g}, \dots, e^{D_h}, u^{D_1}, u^{D_2}, \dots, u^{D_r}, \dots, u^{D_k}) \quad (5.13)$$

$$V^D = (v^{D_1}, v^{D_2}, \dots, v^{D_j}, \dots, v^{D_n}) \quad (5.14)$$

$$W^D = (w^{D_1}, w^{D_2}, \dots, w^{D_i}, \dots, w^{D_m}) \quad (5.15)$$

$$E^D = (e^{D_1}, e^{D_2}, \dots, e^{D_g}, \dots, e^{D_h}) \quad (5.16)$$

$$U^D = (u^{D_1}, u^{D_2}, \dots, u^{D_r}, \dots, u^{D_k}) \quad (5.17)$$

となる。

さらにまた、グラフ  $G^*$  とグラフ  $G^{D*}$  の構成要素間の関係を図示すると第6図のようになる。上述の定義やこの図で知られるように、 $W$  の要素と  $V^D$  の要素とは完全に同一であり、また、 $V$  の要素と  $W^D$  の要素とは完全に同一で

あるが、 $U$  と  $E^D$ 、あるいは、 $E$  と  $U^D$  とは、それぞれ同一の要素から構成されているとはいえない。なお、 $E^D$  は、 $E$  と  $U$  の中からえらばれるのであるが、 $E^D$  をえらび出す場合2通り以上のえらび方がある場合には、いずれのえらび方によってえらばれた  $E^D$  も、すべて追加グラフ  $G^*$  の双対追加グラフ  $G^{D*}$  とみなすことにする。たとえば、いま、第7図に示されるような追加グラフ  $G^*$  があるとき、その双対追加グラフとしては、 $G^{D*}$  に示すような種々の基本グラフをもつグラフが得られる。上述の定義に従えば、これらのグラフは、すべて追加グラフ  $G^*$  の双対追加グラフとみなされる。もしも、これらの双対追加グラフを互いに区別する必要のある場合には、これらに番号を与え、それぞれのグラフに、 $G^{D*}_1, G^{D*}_2, \dots$  という記号を与えることによって区別することにする。要約するならば、追加グラフ  $G^*$  の双対追加グラフ  $G^{D*}$  は、 $G^*$  における  $W$  を、 $G^{D*}$  における  $V^D$  とみなすことによって得られるグラフであるといえることができる。

(2) 追加グラフおよび双対追加グラフのミニマックス、マクシミン、マキシマム、およびミニマム点

一般に、点  $w_j$  (あるいは  $v^{D_j}$ ) から点  $v_i$  (あるいは  $W^{D_i}$ ) までの線の長さを  $d_{ji}$  とすれば、追加グラフ  $G^*$  のミニマックス点  $P_{\minimax}$ 、マクシミン点  $P_{\maximin}$ 、マキシマム点  $P_{\max}$ 、および、ミニマム点  $P_{\min}$  は、それぞれ、つぎの式で定義される長さ  $d_{ji}^*$ ,  $d_{ji}^{**}$ ,  $S^*$ 、および、 $S^{**}$  をもつ線の一端にある点  $w_j$  である。

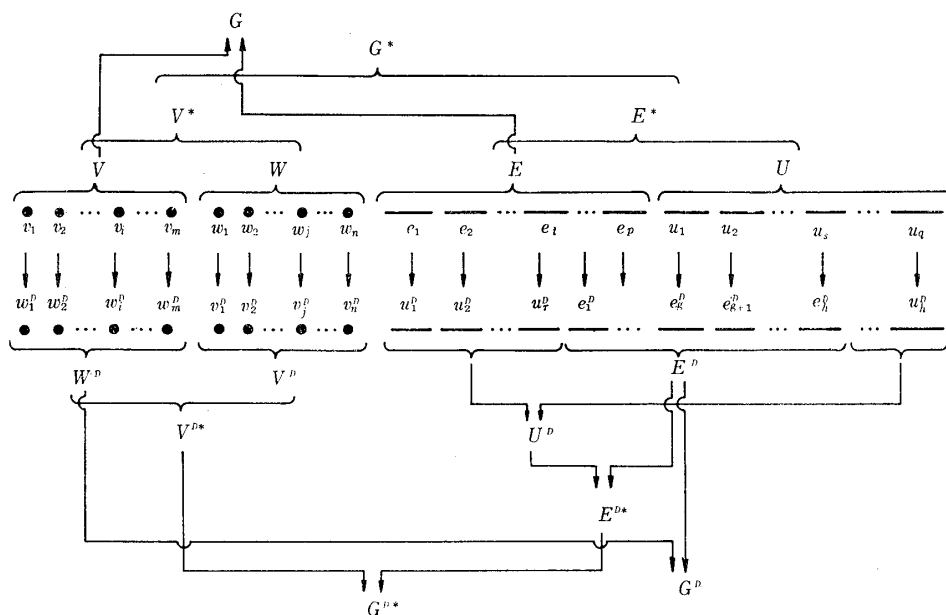
$$d_{ji}^* = \min_j \max_i d_{ji} \quad (5.18)$$

$$d_{ji}^{**} = \max_j \min_i d_{ji} \quad (5.19)$$

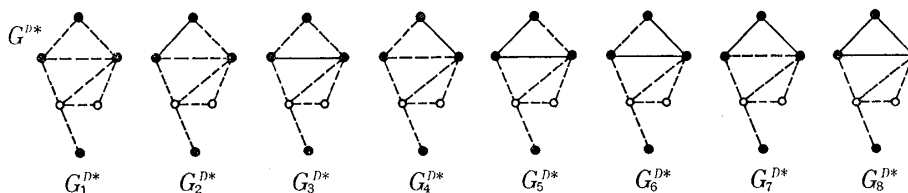
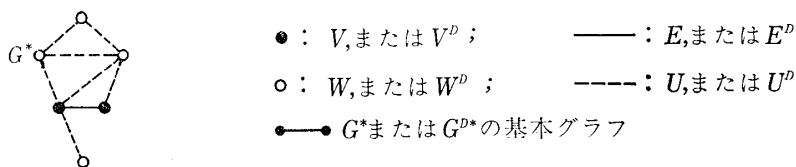
$$S^* = \max_j \sum_{i=1}^m d_{ji} \quad (5.20)$$

$$S^{**} = \min_j \sum_{i=1}^m d_{ji} \quad (5.21)$$

また、双対追加グラフの上記の諸点は、それぞれ、つぎの式で定義される長さ  $d^{D_{ij}^*}$ ,  $d^{D_{ij}^{**}}$ ,  $S^{D*}$ 、および  $S^{D^{**}}$  をもつ線の一端にある点  $w^{D_i}$



第6図 追加グラフおよび双対追加グラフの各構成要素ならびにそれらの関係



第7図 追加グラフとその双対追加グラフ

である。

$$d_{ij}^{D*} = \min_i \max_j d^{D_{ij}} \quad (5.22)$$

$$d_{ij}^{D**} = \max_i \min_j d^{D_{ij}} \quad (5.23)$$

$$SD^* = \max_i \sum_{j=1}^n d^{D_{ij}} \quad (5.24)$$

$$SD^{**} = \min_i \sum_{j=1}^n d^{D_{ij}} \quad (5.25)$$

ただし、 $d^{D_{ij}}$  とは、双対追加グラフにおける点  $w^D_i$  から  $v^D_j$  までの線の長さである。

## VI グラフによる東京都の構造解析

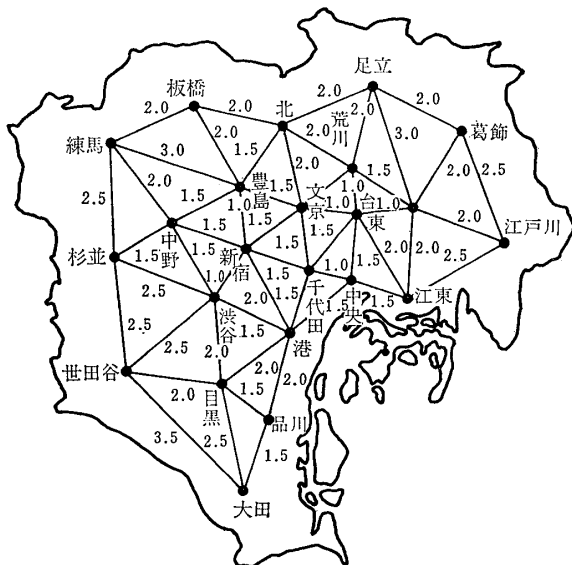
(1) グラフを用いて示された東京都各区の位置

追加グラフによる諸解析は、5で見たように、公共施設の位置の解析や計画に適したものであり、この小論においては、この解析方法を用いて廃棄物処理施設の建設地点の検討や評価を試みようとしているのであるが、その前に、通常のグラフ（特にここでは平面グラフ）を用いて、東京都の区の空間的構造について考察してみたい。

東京都は、第8図に示されているように23区に区分されている<sup>15)</sup>。まず、各区の中央部に点(中心点)を与え、この点に、区の人口が集中しているとみなすことにする。次いで、隣接する区をみだし、それらの区の点の間を線で結んでみる。このとき、必ず平面グラフが得られる<sup>16)</sup>。第9図は、上記のようにして得られた平面グラフである。なお、この平面グラフの線は、境界線を共有している区を中心点間に線を与えれば得られるのであるが、墨田、江東、中央の3区は、互いに一点で隣接している。このような



第8図 東京都の区の分布図



第9図 東京都の区の平面グラフ

場合には、これらの区が互いに隣接しているとみなすと平面グラフがえがけなくなる。したがって、平面グラフを構成するために、ここでは、江東区が墨田区と中央区に隣接し、墨田区と中央区は隣接していないとみなした。

各区の中心点間を結ぶ線の長さは、千代田、中央の2区を結ぶ線の長さを1として、表現した。その長さが、第9図の図中の線に与えられた数字によって示されている。各区の中心点のシンベル指標を求めるために、各中心点間の距離を示す行列をつくってみると、式(6.1)のようになる。いうまでもなく、この式の第*i*行第*j*列の数字が第*i*区と第*j*区間の距離である。式(6.1)の右端または下端の値がシンベル数である。

このシンベル数を地図上に示してみると、第10図のようになる。シンベル数の分布状態をより明確にするため、シンベル指標の等値線を地図上にえがいてみると、第11図のようになる。第11図によれば、シンベル指標の最小値のある地点、すなわち、グラフのメディアンは新宿区内にあり、東京都庁のある千代田区も、その近辺にあることが知られる。

この図から知られるように、シンベル数はグラフにおける各点の位置の定量的指標、すなわち、各点のグラフ内の中心部からの近さ(あるいは遠さ)を示す指標——ある点のこの値が大きいことは、その点が、グラフの中心部から遠い場所にあることを示している——として用いられる。

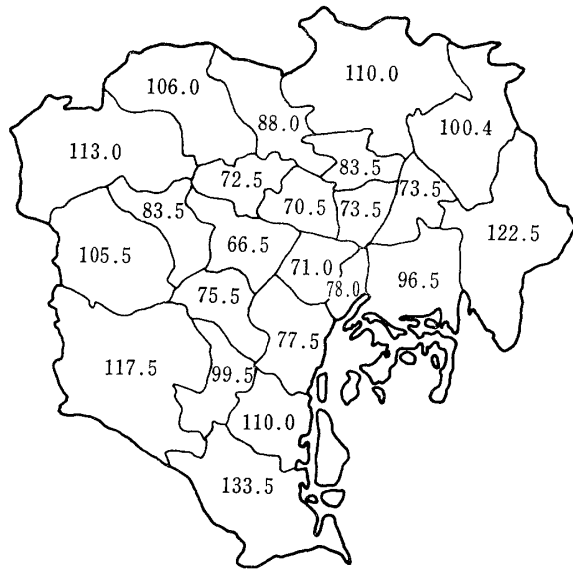
## (2) シンベル指標と人口密度

(1)に示したように、シンベル指標は、グラフ内の点の相対的位置の指標として用いられる。したがって、一般に、ある地域内の各地点の位置をシンベル指標によって示し(いうまでもなく各地点はグラフの点とみなされ、各地点は線とみなされる経路によって結ばれていることを前提としている)、その地点の位置と人口密度との関係を観察することによって、人口分布の地理的(空間的)分布の特徴を観察することができる。

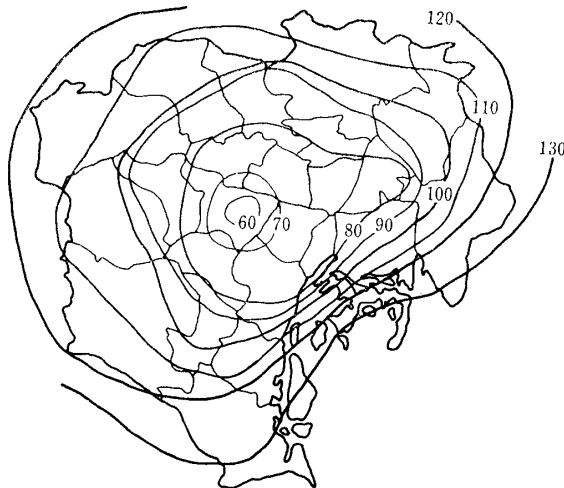
区		千代田	中央	中	港	新宿	文京	台東	墨田	江東	品川	目黒	大田	世田谷	渋谷	中野	杉並	豊島	北	荒川	板橋	練馬	足立	葛飾	江戸川	合計
	千代田	0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	2.5	2.5	2.5	3.5	5.0	5.5	2.5	3.0	4.5	2.5	3.5	2.5	4.5	5.0	4.5	4.5	4.5	71.0
	中央	1.0	0	1.5	2.5	2.5	2.5	1.5	2.5	1.5	3.5	3.5	5.0	5.5	3.0	4.0	5.5	4.5	4.5	2.5	5.5	6.0	4.5	4.5	4.0	78.0
	中	1.5	1.5	0	2.0	3.0	3.0	3.0	4.0	3.0	2.0	2.0	3.5	4.0	1.5	3.0	4.0	3.0	5.0	4.0	5.0	5.0	6.0	6.0	5.5	77.5
	港	1.5	2.5	2.0	0	1.5	2.5	2.5	3.5	4.0	4.0	3.0	5.5	3.5	1.0	1.5	3.0	1.0	2.5	3.0	3.0	3.5	5.0	5.5	4.0	66.5
	新宿	1.5	2.5	3.0	1.5	0	1.0	2.0	2.0	3.0	5.0	5.0	6.5	5.0	2.5	3.0	4.5	1.5	2.0	1.5	3.5	4.5	3.5	4.0	4.0	70.5
	文京	1.5	1.5	3.0	2.5	1.0	0	1.0	1.0	2.0	5.0	5.0	6.5	6.0	3.5	4.0	5.5	2.5	3.0	1.0	4.5	5.5	3.0	3.0	3.0	73.5
	台東	2.5	2.5	4.0	3.5	2.0	2.0	1.0	0	2.0	6.0	6.0	7.5	7.0	4.5	5.0	6.5	3.5	3.5	1.5	5.5	6.5	3.0	2.5	2.0	88.0
	墨田	2.5	1.5	3.0	4.0	3.0	3.0	2.0	2.0	0	5.0	5.0	6.5	7.0	4.5	5.5	7.0	4.5	5.0	3.0	6.5	7.5	5.0	4.0	2.5	96.5
	江東	3.5	3.5	2.0	4.0	5.0	5.0	5.0	6.0	5.0	0	1.5	1.5	3.5	3.5	4.5	6.0	5.0	7.0	6.0	7.0	7.0	8.0	8.0	7.5	110.0
	品川	3.5	3.5	2.0	3.0	5.0	5.0	5.0	6.0	5.0	1.5	0	2.5	2.0	2.0	3.5	4.5	4.0	5.5	6.0	6.0	5.5	8.0	8.0	7.5	99.5
	目黒	5.0	5.0	3.5	5.5	6.5	6.5	6.5	7.5	6.5	1.5	2.5	0	3.5	4.5	6.0	4.0	6.5	8.5	7.5	8.5	6.5	9.5	9.5	9.0	133.5
	大田	5.5	5.5	4.0	3.5	5.0	6.0	6.0	7.0	7.0	3.5	2.0	3.5	0	2.5	4.0	2.5	4.5	6.0	6.5	7.0	5.0	8.5	9.0	9.5	117.5
	世田谷	2.5	3.0	1.5	1.0	2.5	3.5	3.5	4.5	4.5	3.5	2.0	4.5	2.5	0	1.5	2.5	2.0	3.5	4.0	4.0	3.5	6.0	6.5	6.5	75.5
	渋谷	3.0	4.0	3.0	1.5	3.0	3.0	4.0	5.0	5.5	4.5	3.5	6.0	4.0	1.5	0	1.5	1.5	3.0	4.5	4.5	3.5	2.0	5.0	7.0	83.5
	中野	4.5	5.5	4.0	3.0	4.5	5.5	5.5	6.5	7.0	6.0	4.5	4.0	2.5	2.5	1.5	0	3.0	4.5	6.0	4.5	2.5	6.5	8.5	8.5	105.5
	杉並	2.5	3.5	3.0	1.0	1.5	2.5	2.5	3.5	4.5	5.0	4.0	6.5	4.5	2.0	1.5	3.0	0	1.5	3.0	2.0	3.0	3.5	5.5	5.5	72.5
	豊島	3.5	4.5	5.0	2.5	2.0	2.0	3.0	3.5	5.0	7.0	5.5	8.5	6.0	3.5	3.0	4.5	1.5	0	2.0	2.0	4.0	2.0	4.0	5.5	88.0
	北	2.5	2.5	4.0	3.0	3.0	1.5	1.0	1.5	3.0	6.0	6.0	7.5	6.5	4.0	4.5	6.0	3.0	2.0	0	4.0	6.0	2.0	3.5	3.5	83.5
	荒川	4.5	5.5	5.0	3.0	3.5	4.5	4.5	5.5	6.5	7.0	6.0	8.5	7.0	4.0	3.5	4.5	2.0	4.0	4.0	0	2.0	4.0	6.0	7.5	106.0
	板橋	5.0	6.0	5.0	3.5	4.5	4.5	5.5	6.5	7.5	7.0	5.5	6.5	5.0	3.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	2.0	0	6.0	8.0	8.5	113.0
	練馬	4.5	4.5	6.0	5.0	3.5	3.0	3.0	3.0	5.0	8.0	8.0	9.5	8.5	6.0	5.0	6.5	3.5	2.0	2.0	4.0	6.0	0	2.0	4.5	110.0
	足立	4.5	4.5	6.0	5.5	4.0	3.0	3.0	2.5	4.0	8.0	8.0	9.5	9.0	6.5	7.0	8.5	5.5	4.0	3.5	6.0	8.0	2.0	0	2.5	100.4
	葛飾	4.5	4.0	5.5	4.0	4.0	4.0	3.0	2.0	2.5	7.5	7.5	9.0	9.5	6.5	7.0	8.5	5.5	5.5	3.5	7.5	8.5	4.5	2.5	0	122.5
	江戸川	71.0	78.0	77.5	66.5	70.5	73.5	88.0	96.5	110.0	99.5	133.5	117.5	75.5	83.5	105.5	72.5	88.0	83.5	106.0	113.0	106.0	110.0	100.4	122.5	71.0
	合計																									

(6.1)

第2表 東京都区部におけるシンベル指標と人口密度



第10図 シンベル指標の分布図



第11図 シンベル指標の等値線図

第2表は、東京都の各区の中心点のシンベル指標（(1)で求めた値）と大正9年、昭和15年、および、昭和45年における各区の人口密度とを示した表<sup>17)</sup>である。いま、これらの値のうち、前者（シンベル指標の値）を横軸に、後者を縦軸に示して、各年のシンベル指標の値と人口密度の値との関係を示してみると、第12図(a), (b) および(c)のようになる。都内の中心部に高い人口密度の見られた大正9年および昭和15年においては、上記の2種の値の関係を示す点は、右下りの傾向線に沿って分布している。これに対して、都市内の地域的人口増加のドーナツ型現象<sup>18)</sup>の現われた昭和45年における図では、点の

区	シンベル指標	人口密度*(千人/km <sup>2</sup> )		
		大正9年	昭和15年	昭和45年
千代田	71.0	18.6	16.0	6.4
中央	78.0	28.6	25.9	10.3
港	77.5	16.7	17.0	11.5
新宿	66.5	15.9	21.7	21.7
文京	70.5	24.9	26.6	20.5
台東	73.5	43.8	45.9	24.1
墨田	88.0	23.3	34.8	20.4
江東	96.5	9.3	15.4	12.3
品川	110.0	6.9	23.8	24.5
目黒	99.5	1.5	13.7	20.5
大田	133.5	1.9	12.6	16.3
世田谷	117.5	0.6	4.5	13.4
渋谷	75.5	8.9	16.6	18.2
中野	83.5	1.9	13.7	24.1
杉並	105.5	0.5	7.3	16.5
豊島	72.5	8.5	24.1	27.2
北	88.0	4.5	16.6	21.0
荒川	83.5	11.9	34.5	23.9
板橋	106.0	1.0	2.9	14.8
練馬	113.0	0.5		11.2
足立	110.0	1.1	4.3	10.7
葛飾	100.4	0.8	4.5	13.7
江戸川	122.5	0.9	3.9	9.9

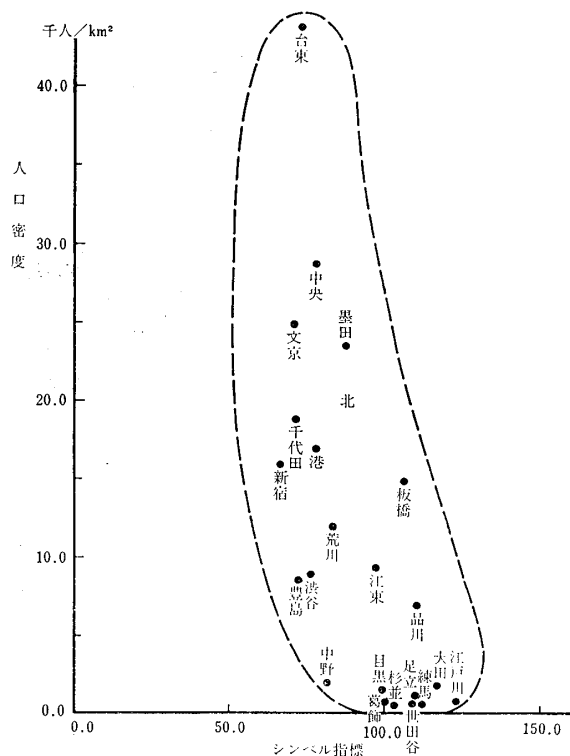
\* 東京都総務局統計部人口統計課編：『東京都の人口統計のあらまし』、東京、東京都広報室普及部都民資料室、昭和50年、64-65頁。

分布が右下りの傾向線に沿ったものではなくなっている<sup>19)</sup>。このようにして、人口分布の状態を定量的に観察することができる。

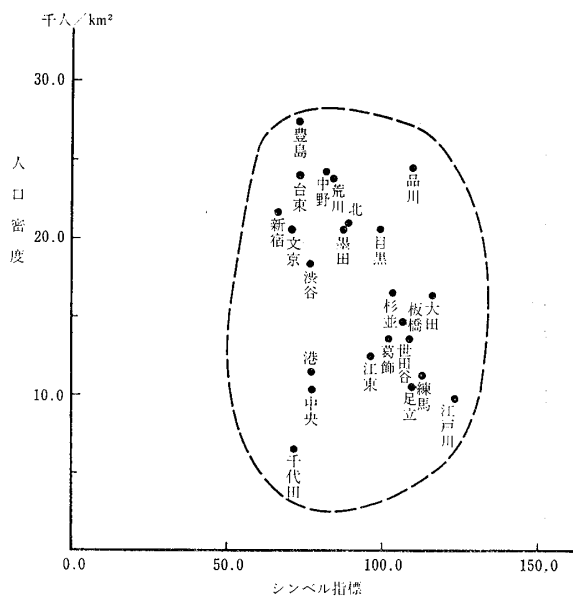
なお、参考のために、第12図の(b)と(c)との各点の位置を比較してみると第13図のようになる。この図では、図(b)における各点が図(c)においてどのように移動したかが矢印によって示されている。この図によれば、人口増加のドーナツ型現象によって、都市中心部の人口密度の低下と都市周辺部のその上昇が引き起されていることを、明確に示すことができる。しかも、どの位置にある人口密度がどのように変化したかを定量的に示すことができるのである。

## Ⅶ グラフを用いて評価された廃棄物処理施設の位置

### (1) 廃棄物処理施設の位置



(a) 大正9年 (1920年)



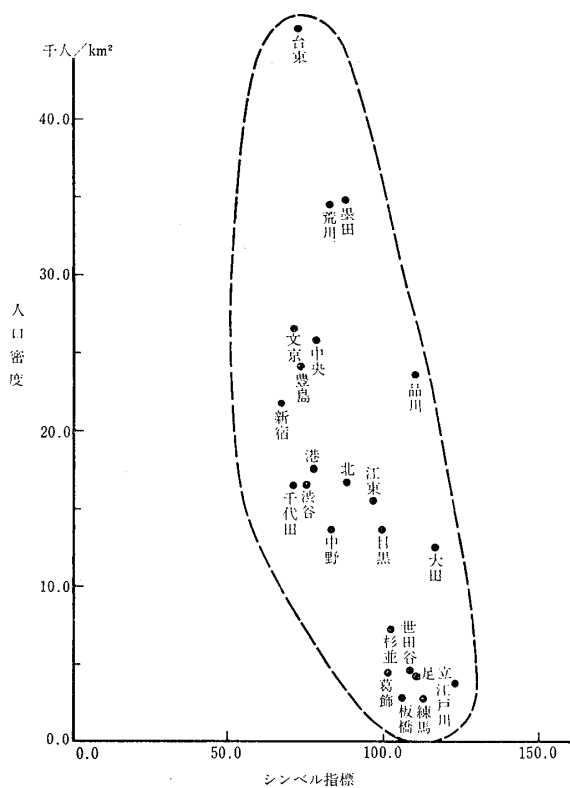
(c) 昭和45年 (1970年)

東京都の廃棄物処理施設は、第14図に示されたような位置に建設され、あるいは建設される予定となっている<sup>20)</sup>。

いま、第9図を基本グラフとみなし、このグラフに廃棄物処理施設の地点、ならびに、この地点と基本グラフとを結ぶ経路を付加したグラフを追加グラフとみなせば(このとき、廃棄物処理施設の地点は追加点、この点と基本グラフとを結ぶ経路は追加線とみなされる)、第15図のような追加グラフが得られる。なお、廃棄物処理施設(清掃工場)を、既存のもの、建設中のもの、および建設予定のものに分類するならば、ここでは、追加グラフとしては、つぎのようなものが得られる。

- i) 既存の清掃工場を追加点とする追加グラフ
- ii) 既存と建設中の清掃工場を追加点とする追加グラフ
- iii) 既存と建設中と建設予定の清掃工場を追加点とする追加グラフ

清掃工場は、そこに最も近い人々からできるだけ遠くにあることが望ましいから、まず、もし、現在既存の清掃工場のある場所に、まだ、清掃工場がなく、その場所が、清掃工場の建設候補地だと仮定した場合、どの地点から建設さ

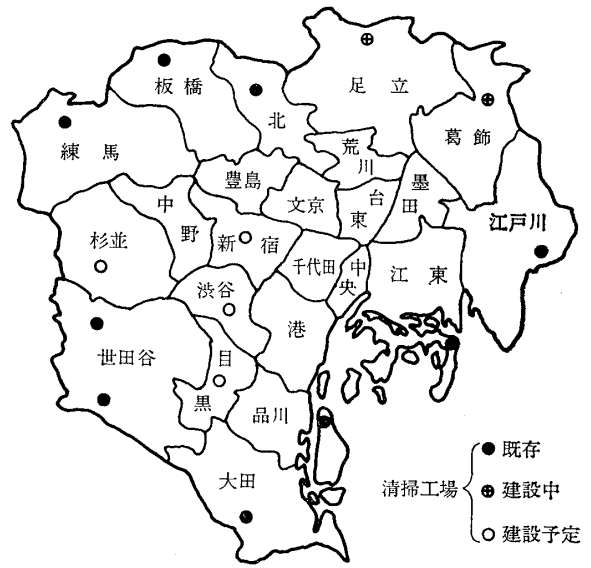


(b) 昭和15年 (1940年)

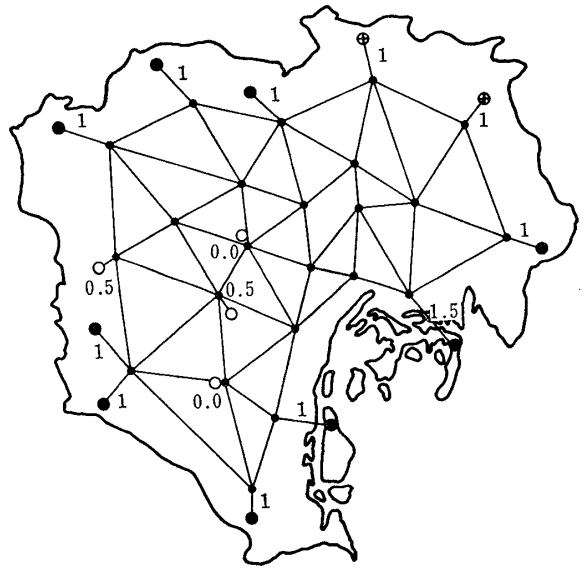
第12図 シンベル指標と人口密度との関係

区	区																			合計
	江東川	品川	大田	世田谷I	世田谷II	北	板橋	江戸川	練馬	中野	杉並	豊島	北	荒川	板橋	練馬	足立	葛飾	江戸川	
千代田	4.0	4.5	6.0	6.5	6.5	4.5	5.5	6.0	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.0
中央	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	8.5
港	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	3.0	4.5	10.0
新宿	5.5	5.0	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	10.5
文京	4.5	6.0	7.5	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	10.5
台東	3.5	3.5	6.0	7.0	7.5	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	10.5
墨田	3.5	3.5	7.0	8.5	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	10.5
江東	1.5	6.0	6.0	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	10.5
品川	6.5	6.5	1.0	2.5	2.5	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	10.5
大田	8.0	6.5	2.5	3.5	3.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	10.5
世田谷I	8.5	8.5	8.0	4.5	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	10.5
世田谷II	8.5	8.5	8.0	4.5	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	1.0	4.5	10.5
北	6.5	6.5	2.5	3.5	3.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	10.5
板橋	8.0	6.5	2.5	3.5	3.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	10.5
江戸川	9.0	8.0	7.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	10.5
練馬	9.0	8.0	7.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	10.5
合計	49.0	50.5	46.5	43.0	48.0	51.0	56.5	51.5	47.0	57.0	51.0	44.5	49.0	51.5	46.5	53.5	54.5	57.0	55.0	65.5

(7.1)



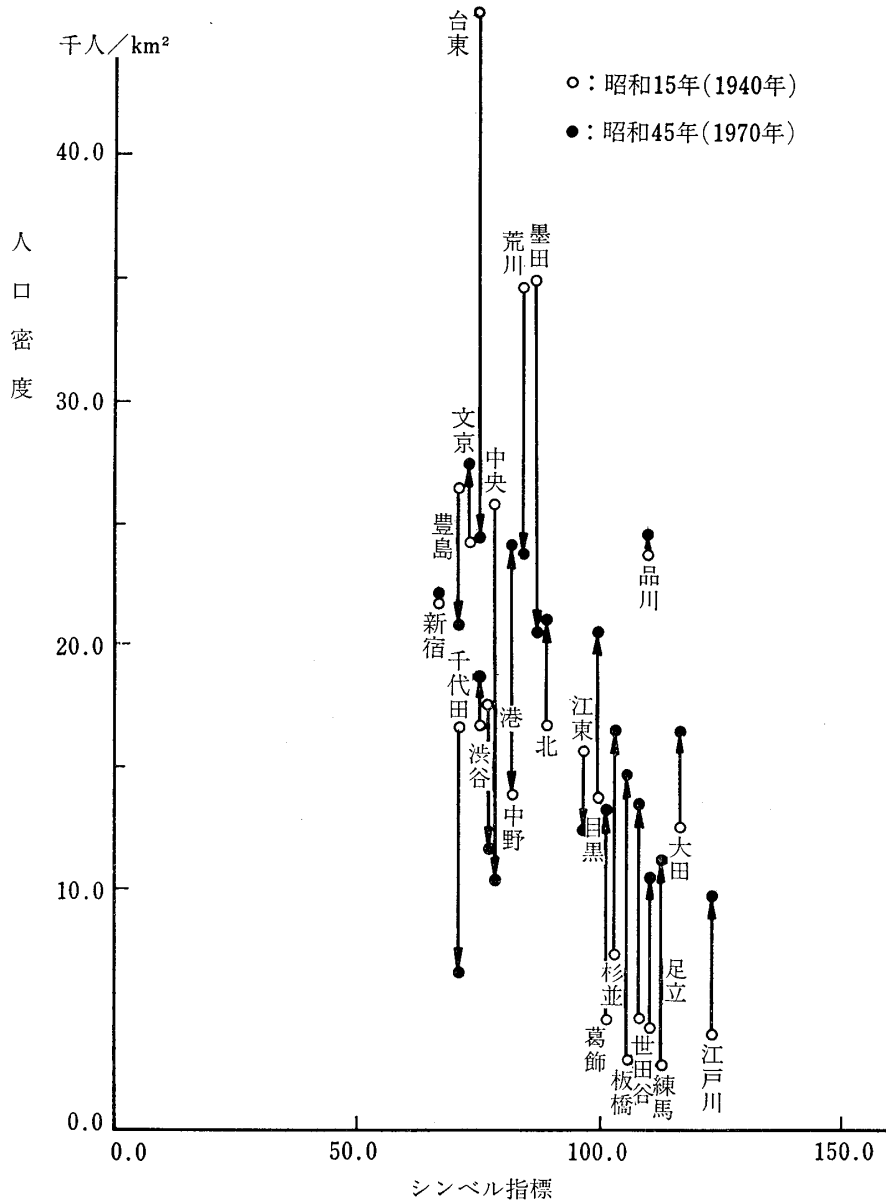
第14図 東京都の廃棄物処理施設の位置



清掃工場の位置は東京都清掃局総務部普及課編集発行『東京都の清掃工場』昭和51年の表紙による。

第15図 廃棄物処理施設によって得られる追加グラフ





第13図 昭和15年と昭和45年における人口密度の比較

れて行くかを考えてみよう。この場合は、既存の清掃工場を追加点とする追加グラフの最大値を求め、その点から清掃工場が建設されて行くと考えられる。この点を求めるための行

列は、式 (7.1) となる。

この式からミニマックス点を見いだすため、まず、各行の最小値を見いだしてみよう。その値は、

江東**	4.0	3.0**	4.5	.....	
	.....	6.0	1.0	2.5	
	.....	3.5	1.0	4.5	
	.....	4.5	1.0	3.5	
	.....	4.5	1.0	3.5	
	.....	2.5	1.0	3.0	
	.....	5.0	1.0	3.0	
	.....	3.5	1.0		
練馬	.....	3.0	1.0	7.0	

(7.2)

		千代田	中央	港	新宿	文京	台東	墨田	江東	品川	目黒	大田	世田谷	渋谷	中野	杉並	豊島	北	荒川	板橋	練馬	足立	葛飾	江戸川	合計	
既	清	4.0	3.0	4.5	5.5	4.5	3.5	3.5	1.5	6.5	6.5	8.0	8.5	6.0	7.0	8.5	6.0	6.5	4.5	8.0	9.0	6.5	5.5	4.0	131.0	
		4.5	4.5	3.0	5.0	6.0	6.0	7.0	6.0	6.0	1.0	2.5	4.5	4.5	4.5	5.5	7.0	6.0	7.0	8.0	8.0	9.0	9.0	8.5	133.0	
		6.0	6.0	4.5	6.5	7.5	7.5	8.5	7.5	7.5	2.5	3.5	1.0	4.5	5.5	7.0	5.0	7.5	8.5	9.5	7.5	10.5	10.5	10.0	156.5	
		6.5	6.5	5.0	4.5	6.0	7.0	8.0	8.0	8.0	4.5	3.0	4.5	1.0	3.5	5.0	3.5	5.5	7.0	7.5	8.0	6.0	9.5	10.0	10.5	140.5
		6.5	6.5	5.0	4.5	6.0	7.0	8.0	8.0	8.0	4.5	3.0	4.5	1.0	3.5	5.0	3.5	5.5	7.0	7.5	8.0	6.0	9.5	10.0	10.5	140.5
		4.5	5.5	6.0	3.5	3.0	4.0	4.5	6.0	6.0	8.0	8.0	6.5	9.5	7.0	4.5	4.0	5.5	2.5	3.0	3.0	5.0	3.0	6.5	3.0	111.0
		5.5	6.5	6.0	4.0	4.5	5.5	6.5	7.5	8.0	7.0	7.0	9.5	8.0	5.0	4.5	5.5	3.0	3.0	5.0	1.0	3.0	5.0	7.0	8.5	129.0
		5.5	5.0	6.5	5.0	5.0	4.0	4.0	3.0	3.5	8.5	8.5	10.0	10.5	7.5	8.0	9.5	6.5	6.5	4.5	8.5	9.5	5.5	3.5	1.0	145.5
		6.0	7.0	6.0	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	8.0	6.5	7.5	7.5	6.0	4.5	3.0	3.5	4.0	4.0	7.0	3.0	1.0	7.0	9.0	9.5	136.0
		5.5	5.5	7.0	6.0	4.5	4.0	4.0	6.0	9.0	9.0	9.0	10.5	9.5	7.0	6.0	7.5	4.5	3.0	3.0	5.0	7.5	1.0	3.0	5.5	133.0
5.5	5.5	7.0	6.5	5.0	4.0	4.0	3.5	5.0	9.0	9.0	10.5	10.0	7.5	8.0	9.5	6.5	5.0	4.5	7.0	9.0	3.0	1.0	3.5	123.4		
		60.0	61.5	60.5	55.5	57.5	59.0	64.0	67.5	69.5	65.0	73.0	70.5	59.0	63.0	63.5	57.5	61.5	62.0	69.0	71.5	69.5	75.0	74.5	(7.3)	
		東川田谷	江品大世世北	板橋	江戸川	練馬	足立	葛	合																計	
		既										存										建設中				
		清										掃										工		場		

となる。ただし、ここでも、太字の値が各行の最小値である。また、ここでは、式(7.1)の行列の要素をすべて書くことはせず、その最小値の近辺の要素のみを書くことにした。この式の中に見られる最小値のうちで最大のものは、第1行の3.0である。したがって、式(7.1)において、\*\*を付加した、江東区の建設候補地がマクシミン点であり、ここに清掃工場が最初に建設されるべきであることが明らかになる。

この江東区に清掃工場が建設された後は、その他のすべての建設候補地に清掃工場が無差別的に(建設の順序において)建設され得るといえよう。その理由は、式(7.1)から江東区を除いた行列をつくり、その行列の各行の最小値を見いだすと、その値は、すべて1.0となり、すべての点がマクシミン点とみなし得ることになるからである。

次いで、清掃工場の建設候補地として、既存および建設中の清掃工場の場所が選定されたと仮定してみよう。この場合の式(7.1)と同様の行列は、式(7.3)となる。

そして、この式の各行の最小値は、(7.4)となる。この最小値中の最大の値は、やはり第1行の3.0である。したがって、この場合にも、江東区の候補地清掃工場が最初に建設されるべきであるといえよう。

江東区に清掃工場が建設された後は、最初の場合と同様の理由から、その他のすべての建設候補地に清掃工場が無差別的に建設され得であろう。

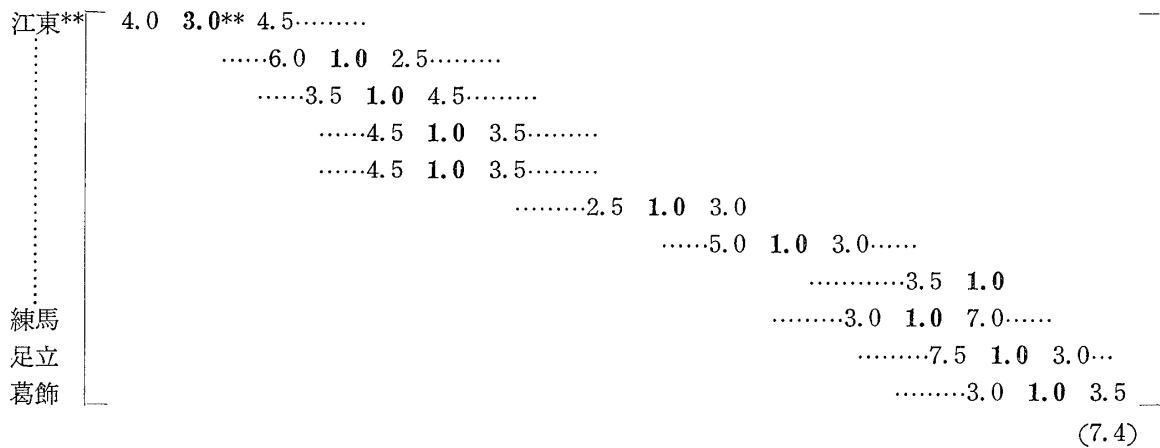
最後に、清掃工場の建設候補地として、現在、既存、建設中、および、建設予定の清掃工場の場所が選定されたと仮定してみよう。この場合の式(7.1)と同様の行列は、式(7.5)となる。

式(7.5)の各行の最小値は、(7.6)となる。この式の最小値のうち最大の値をもつものは、第1行の3.0である。したがって、江東区の建設候補地が式(7.3)でその構造が示される追加グラフのマクシミン点とみなされる。ここに清掃工場が建設された後は、建設候補地が、品川区から杉並区の建設候補地となる。したがって、

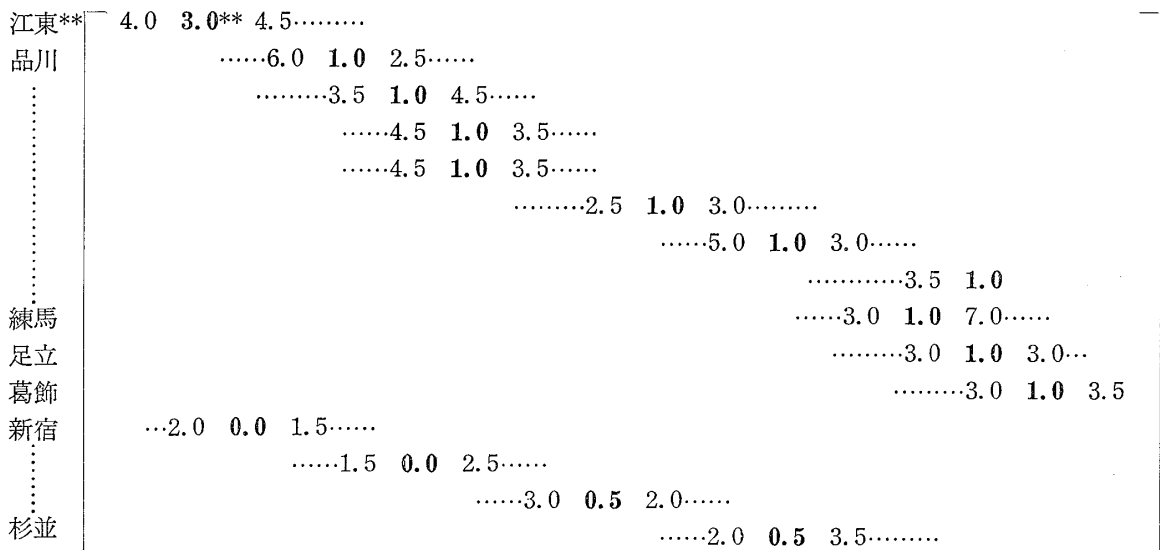
区

既 存	江東	千代田	中央	港	新宿	文京	台東	墨田	江東	品川	目黒	大田	世田谷	渋谷	中野	杉並	豊島	北	荒川	板橋	練馬	足立	葛飾	江戸川	合計
	4.0	4.5	3.0	4.5	5.5	4.5	3.5	3.5	1.5	6.5	6.5	8.0	8.5	6.0	7.0	8.5	6.0	6.5	4.5	8.0	9.0	6.5	5.5	4.0	131.0
清 掃 工 場	品川	大田	6.0	4.5	3.0	6.0	7.0	7.0	6.0	1.0	2.5	2.5	4.5	4.5	5.5	7.0	6.0	8.0	7.0	8.0	8.0	9.0	9.0	8.5	133.0
	6.5	6.5	6.0	4.5	6.5	7.5	8.5	8.0	8.0	4.5	3.5	1.0	4.5	5.5	7.0	5.0	7.5	9.5	8.5	9.5	7.5	10.5	10.5	10.0	156.5
建設中	世田谷 I	世田谷 II	6.5	5.0	4.5	6.0	7.0	8.0	8.0	4.5	3.0	4.5	1.0	3.5	5.0	3.5	5.5	7.0	7.5	8.0	6.0	9.5	10.0	10.5	140.5
	6.5	6.5	6.0	4.5	6.0	7.0	8.0	8.0	8.0	4.5	3.0	4.5	1.0	3.5	5.0	3.5	5.5	7.0	7.5	8.0	6.0	9.5	10.0	10.5	140.5
建設予定	北	板橋	4.5	5.5	6.0	3.0	4.0	4.5	6.0	8.0	6.5	9.5	7.0	4.5	4.0	5.5	2.5	1.0	3.0	3.0	5.0	3.0	6.5	3.0	111.0
	5.5	6.5	6.0	4.0	4.5	5.5	6.5	7.5	7.5	8.0	7.0	9.5	8.0	5.0	4.5	5.5	3.0	3.0	5.0	1.0	3.0	5.0	7.0	8.5	129.0
建設予定	江戸川	練馬	5.5	5.0	6.5	5.0	4.0	3.0	3.5	8.5	8.5	10.0	10.5	7.5	8.0	9.5	6.5	6.5	4.5	8.5	9.5	5.5	3.5	1.0	145.5
	6.0	7.0	6.0	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	8.0	6.5	7.5	6.0	6.0	4.5	3.0	3.5	4.0	5.0	7.0	3.0	1.0	7.0	9.0	9.5	136.0
建設予定	足立	葛飾	5.5	5.5	7.0	6.0	4.0	4.0	6.0	9.0	9.0	10.5	9.5	7.0	6.0	7.5	4.5	3.0	3.0	5.0	7.5	1.0	3.0	5.5	133.0
	5.5	5.5	7.0	6.5	5.0	4.0	3.5	5.0	5.0	9.0	9.0	10.5	10.0	7.5	8.0	9.5	6.5	5.0	4.5	7.0	9.0	3.0	1.0	3.5	123.4
建設予定	新宿	目黒	1.5	2.5	2.0	0.0	1.5	2.5	4.0	4.0	3.0	5.5	3.5	1.0	1.5	3.0	1.0	2.5	3.0	3.0	3.5	5.0	5.5	4.0	66.5
	3.5	3.5	2.0	3.0	5.0	5.0	6.0	5.0	5.0	1.5	0.0	2.5	2.0	2.0	3.5	4.5	4.0	5.5	6.0	6.0	5.5	8.0	8.0	7.5	99.5
建設予定	渋谷	杉並	3.0	3.5	2.0	1.5	3.0	4.0	5.0	4.0	2.5	5.0	3.0	0.5	2.0	3.0	2.5	4.0	4.5	4.5	4.5	4.0	6.5	7.0	87.0
	5.0	6.0	4.5	3.5	5.0	6.0	7.0	7.5	6.5	5.0	4.5	4.5	3.0	3.0	2.0	0.5	3.5	5.0	6.5	5.0	3.0	7.0	9.0	9.0	117.0
合計	73.0	77.0	71.0	63.5	72.0	76.5	85.5	89.0	85.5	75.5	95.5	82.0	63.5	72.0	79.5	68.5	78.5	82.0	87.5	87.5	87.5	96.0	104.5	102.0	

(7.5)



(7.4)



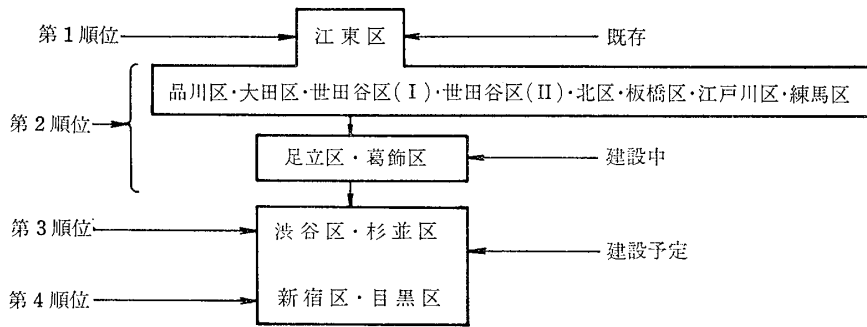
(7.6)

この場合のマクシミン点は、1.0の値をもつ品川から葛飾までの各区の建設候補地となる。清掃工場がより多く必要となり、これらの地点に清掃工場が建設された後は、建設候補地は、新宿から杉並までの各区の建設候補地となる。この場合のマクシミン点は渋谷と杉並の建設候補地がマクシミン点となる。そして、これらの建設候補地に清掃工場が建設された後にさらに清掃工場の必要となるときは、清掃工場の建設候補地は、新宿と目黒の建設候補地となり、ここに清掃工場が建設されることになる。

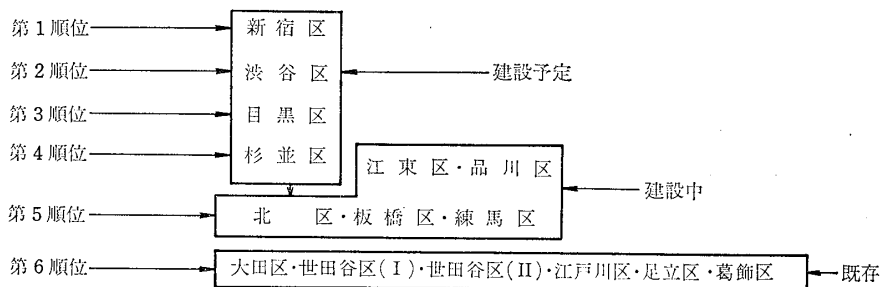
興味あることには、東京都の清掃工場は、上述の順序と同様の順序で建設されてきた。すなわち、いま、式(7.6)から得られた清掃工場の建設順位を図示すると、第16図のようになる。こ

の図に明示されているように、現実には、建設順位が第1順位および第2順位の清掃工場がすでに建設され、建設順位が第3順位にある清掃工場が建設中であり、最後の建設順位のものが建設予定となっている。このことは、東京都は清掃工場の建設候補地のうちマクシミン点——より厳密には各区の中心部からのマクシミン点——をえらびつつ清掃工場を建設してきたことを示唆している。

これまでは、清掃工場は、追加グラフのマクシミン点に建設されるべきであるということから解析を行ってきたが、その理由は、「清掃工場そのものの存在が環境に悪い影響を与えるためできるだけ人々から遠い地点に置かれるべきである」という点にあった。しかし、この理



第16図 式(7.6)の追加グラフにおける清掃工場の建設順序と実際の状態



第17図 式(7.7)の追加グラフにおける清掃工場の建設順序と実際の状態

江東	.....	8.0	9.0	6.5.....			
		.....	8.0	9.0	9.0	8.5	
			.....	7.5	10.5	10.5	10.0
						10.0	10.5
						10.0	10.5
	.....	6.5	9.5	7.0.....			
	.....	7.0	9.5	8.0.....			
		.....	10.0	10.5	7.5.....		
練馬						.....	9.0 9.5
足立	.....	9.0	10.5	9.5.....			
葛飾	.....	9.0	10.5	10.0.....			
新宿*	.....	3.0	5.5*	3.5.....	5.0	5.5*	4.0
					.....	5.5	8.0 8.0 7.5
						.....	6.5 7.0 7.0
杉並						.....	7.0 9.0 9.0

(7.7)

由がなくなれば、清掃工場をマクシミン点に設置する必要がなくなる。実際、もしも、廃棄物処理技術が発達し、清掃工場の存在が環境に悪い影響を与えなくなり、むしろ、廃棄物の運搬が環境に悪い影響を与えるようになるならば、

清掃工場は、「人々からできるだけ近い地点に置かれるべきである」といえよう。このとき、清掃工場は、追加グラフのミニマックス点(清掃工場から最も遠くの位置をもつ人が、できるだけ清掃工場に近くなるように決められた清

掃工場の位置)に決められるべきである。

いま、江東区から杉並区までの既存、建設中、および建設予定の清掃工場の場所を清掃工場建設候補地と仮定し、式(7.5)において、ミニマックス点を見いだしてみよう。ミニマックス点を見いだすため、この式の各行の最大の値を見いだしてみると、(7.7)となる。ただし、ここでも、太字の数値が各行における最大の要素である。これらの最大の要素のうち最小の値をもつ要素は、新宿における建設候補地である。

マクシミン点を見いだすときに行なったように、ここでも、ミニマックス点を見いだしては、そこに清掃工場を建設して行くと仮定すれば、清掃工場の建設順序は、第17図のようになる。この図によれば、最近の清掃工場の建設予定地は、ミニマックス点となっているとみなし得る。

(2) グラフを用いてみいだされる廃棄物処理施設の管理施設の位置

廃棄物処理施設は、互に密接な連絡を維持していることが必要であろう。したがって、いま、各廃棄物処理施設の責任者がしばしば1つの集会場に集まって会議を行なうと仮定しよう。このとき、責任者の移動距離の和が最小になる地点にその集会場(管理施設)を建設することが望ましいであろう。この点は、清掃工場の位置を追加点とした追加グラフの双対追加グラフのもつミニマム点となるといえる。

実際に、i) 既存の清掃工場、ii) 既存および建設中の清掃工場、ならびに、iii) 既存、建設中、および建設予定の清掃工場の管理施設に対するミニマム点の位置を求めてみよう。

まず、上記の3種の清掃工場に関する追加グラフに対する双対追加グラフをつくり、その各行の要素の値の総和を算出してみよう。その結果は、式(7.8)、(7.9)、および(7.10)のようになる。ただし、ここでも、行列の要素の一部を省略した。

これらの式によれば、双対追加グラフのミニマム点は、いずれの場合も新宿となっている。すなわち、新宿に集会場を建設すれば、いずれの場合にも、すべての清掃工場から集会場に集

	江東	品川	練馬	
千代田	4.0	4.5	6.0	49.0
新宿*	5.5	5.0	4.5	43.0*
江戸川	4.0	8.5	9.5	65.5

(7.8)

	江東	品川	練馬	足立	葛飾	
千代田	4.0	4.5	6.0	5.5	5.5	60.0
新宿*	5.5	5.0	4.5	6.0	6.5	55.5*
江戸川	4.0	8.5	9.5	5.5	3.5	74.5

(7.9)

	江東	品川	練馬	足立	葛飾	新宿	杉並	
千代田	4.0	4.5	6.0	5.5	5.5	1.5	5.0	73.0
新宿*	5.5	5.0	4.5	6.0	6.5	0.0	3.5	63.5*
江戸川	4.0	8.5	9.5	5.5	3.5	4.0	9.0	102.0

(7.10)

まる移動費用は最小となるであろう。

VIII 結 語

グラフ理論は、図形や交通、情報等の経路を観察し、解析する場合、きわめて有効な理論である。ここでは、グラフ理論においてすでに知られているグラフに関する種々の指標や点について考察を行なった後、追加グラフ、および、これに対する一種の双対とみなし得る双対追加グラフが存在し得ること、ならびに、これらのグラフには、それぞれ、ミニマックス点、マクシミン点、マキシマム点、およびミニマム点が定義し得ることを明らかにした。

追加グラフは、公共施設の位置を検討する場合に有効に利用し得るグラフであり、ここでは、その種の検討の一例として、東京都における廃棄物処理施設の位置の評価ならびに廃棄物処理

施設の管理施設（すなわち、廃棄物処理施設管理者集会場）の位置の選定についての考察を行なった。

この検討によって、これまでの東京都の廃棄物処理施設（ここでは、清掃工場）は、追加グラフのマクシミン点に建設されてきたこと、そしてまた、今日計画されている清掃工場の位置が追加グラフのミニマックス点に相当していることが明らかにされたが、これは、興味ある結果であると思われた<sup>21)</sup>。

### Synopsis

SUZUKI, KEISUKE : Minimax, maximin, maximum, and minimum points in a graph : An investigation of the positions of facilities of disposal of garbage. The Journal of Ryūtsū Keizai University (Ryūtsū Keizai Daigaku Ronsyū) Vol. 11, No. 3, 1976/1, pp. 1-24.

In this paper, I proposed that when we define an augmented graph, minimax, maximin, maximum, and minimum points can be found in the graph and the dual augmented graph can be defined.

The "augmented graph" is a graph obtained by addition of some vertices and edges to a given graph which is called "basic graph" in this paper.

If the vertices in a basic graph are denoted by  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), those added to the basic graph by  $w_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), and the length of the edge between vertices  $w_j$  and  $v_i$  by  $d_{ji}$ , the minimax, maximin, maximum, and minimum points are the points  $w_j$ 's which have the lengths  $d_{ji}^*$ ,  $d_{ji}^{**}$ ,  $S^*$ , and  $S^{**}$  defined by

$$d_{ji}^* = \min_j \max_i d_{ji}$$

$$d_{ji}^{**} = \max_j \min_i d_{ji}$$

$$S^* = \max_j \sum_{i=1}^m d_{ji}$$

$$S^{**} = \min_j \sum_{i=1}^m d_{ji}$$

respectively.

And the dual augmented graph is the graph obtained by regarding the  $w_j$ 's ( $j=1, 2, \dots, n$ ) as

the vertices in a new basic graph and the  $v_i$ 's ( $i=1, 2, \dots, m$ ) as the vertices added to the new basic graph. The minimax, maximin, maximum, and minimum points are the points  $v_i$ 's which have the lengths  $d_{ij}^*$ ,  $d_{ij}^{**}$ ,  $S^*$ , and  $S^{**}$  defined by

$$d_{ij}^* = \min_i \max_j d_{ij}$$

$$d_{ij}^{**} = \max_i \min_j d_{ij}$$

$$S^* = \max_i \sum_{j=1}^n d_{ij}$$

$$S^{**} = \min_i \sum_{j=1}^n d_{ij}$$

respectively.

Incidentally, using augmented and the dual augmented graphs, I tried to examine the positions of the facilities for disposal of garbage in Tokyo.

### 注

1) Kansky, K. J. : *Structure of Transportation Networks*. (Department of Geography, Research Paper No. 84) Chicago, Illinois, The University of Chicago, 1963.

奥平耕造 : 『都市工学読本』, 東京, 彰国社, 昭和51年, 149-199頁.

高森寛 : 「グラフおよびネットワークの理論と応用」, 理論・計量地理学研究会, 日本システム開発研究所監修 : 『計量地理学への招待』, 東京, 青学出版, 昭和49年, 143-163頁.

矢野健太郎, 伊理正夫訳 : 『R. G. バサッカー, T. L. サーティ共著 グラフ理論とネットワーク, 基礎と応用』, 東京, 培風館, 昭和45年.

小野寺力男 : 『グラフ理論の基礎』, 東京, 森北出版, 1968年.

2) Kansky, K. J. : op. cit., pp. 14-19.

3) Kansky, K. J. : op. cit., pp. 28-29.

高森寛 : 前掲論文, 158頁.

4) Kansky, K. J. : op. cit., pp. 29-30.

高森寛 : 前掲論文, 155頁.

5) Kansky, K. J. : op. cit., p. 24.

6) Kansky, K. J. : op. cit., pp. 25-28.

7) Kansky, K. J. : op. cit., p. 20.

8) 小野寺力男 : 前掲書, 11頁.

矢野健太郎, 伊理正夫訳 : 前掲書, 294-295頁.

9) 奥平耕造 : 前掲書, 162頁.

10) この点に関する研究について奥平耕造教授から御好意に満ちた御教示を得た. 奥平耕造 : 前掲書, 187-189頁.

Taaffe, Edward, J. and Howard L. Gauthier Jr. : *Geography of Transportation*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1973.

11) 奥平耕造 : 前掲書, 170-174頁.

12) 奥平耕造 : 前掲書, 174-177頁.

13) 鈴木啓祐 : 『現代統計学入門』, 東京, 交通日本社, 昭和51年, 271-274頁.

14) 第1表の各種の点は、以下に示すような判断過程によって決定された。

図(A)の  $P_{\minimax}$

$$w_1 \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8^* & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

図(A)の  $P_{\maximin}$

$$w_1 \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4^{**} \end{bmatrix}$$

図(A)の  $P_{\max}$

$$w_1^* \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 22^* \\ 17 \end{matrix}$$

図(A)の  $P_{\min}$

$$w_1 \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 22 \\ 17^{**} \end{matrix}$$

図(B)の  $P_{\minimax}$

$$v_1 \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7^* & 5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

図(B)の  $P_{\maximin}$

$$v_1 \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5^{**} \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

図(B)の  $P_{\max}$

$$v_1^* \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 14^* \\ 12 \\ 13 \end{matrix}$$

図(B)の  $P_{\min}$

$$v_1 \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 12^{**} \\ 13 \end{matrix}$$

- 15) 東京都清掃局：『東京の清掃工場』，東京，東京都清掃局，昭和50年，表紙。
- 16) ここでは，平面グラフが用いられているが，ここで述べる諸分析を，各区の中心点をすべて直線で結んでできる非平面グラフを用いても行なえる。
- 17) 東京都総務局統計部人口統計課編：『東京都の人口統計のあらまし，昭和50年』東京，東京都広報室普及部都民資料室，昭和50年，64-65頁。

- 18) 館稔：『日本の人口移動』東京，古今書院，昭和36年，163頁。館稔，浜英彦，岡崎陽一：『未来の日本人口』，東京，日本放送出版会，昭和45年，195頁。
- 19) 横軸の値を，適当に，いくつかの区間に区切り，その区間における人口密度の平均値を算出すれば，その平均値の分布状態によって人口分布状態を定量的に示すことができよう。
- 20) 東京都清掃局：前掲書，表紙。
- 21) ここで，この論文の執筆中，多くの示唆に富んだ奥平耕造教授著『都立工学読本』の存在を御教示下さった矢野勇教授に感謝の意を表す。

### 訂 正

流通経済大学論集第11巻第2号の拙稿(KEISUKE SUZUKI: Characteristics of the Final Form Found through the Reduced Form: Systematizing the Relationship between the Three Forms, Structural, Reduced, and Final Forms) に誤りを見いだしましたので，下記のように訂正させていただきます。

### 誤 正

第11巻第2号  
36頁

式 (1.1) および脚注1) の式

$$+ \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{(p-1)m} c_{ijk} e^{jt-k} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{(p-1)m} c_{ijk} e^{jt-k}$$

37頁

7行

Then

then

39頁

式 (4.9.1) および式 (4.9.2)

$$+ \beta Z$$

$$+ \beta Z_t$$