《論　文》

人口中心点の研究の歴史的考察

鈴　木　啓　祐

I　はしがき*

n人の人々が，ある1つの場所に集まらなければならないため，その集合の場所を決定する場合，その集合の場所，すなわち，集合の地点は，単なる思いつき等によってではなく，何らかの決定原則に従って決定されることが望ましいであろう。その決定原則の1つとして，「そのn人の人々の移動距離の和を最小にする」という原則を考えることができよう。このような原則で決定された集合の場所としてえらばれた地点がフラスケンパー (Paul Flaskämper)[1)] のいう

* この論文を書くとき，多くの著書や論文を参考にしたが，その中でも，特に下記の著書ならびに論文は，この研究をおこなう上で，筆者に，多くの知識と刺戟とを与えた．

(1) Alfred Weber : *Ueber den Standort der Industrien,* Erste Teil, *Reine Theorie des Standortes, Mit einem mathematischen Anhang von Georg Pick,* Tübingen, J. C. B. Mohr, 1922.

Carl J. Friedrich (translated) : *Alfred Weber Theory of the Location of Industries,* Chicago, The University of Chicago Press, 1929.

江沢譲爾監修，日本産業構造研究所訳：『ウェーバー工業立地論』，東京，大明堂，1966年.

(2) Walter Crosby Eells : "A Mistaken Conception of the Center of Population," *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 25, March, 1930, pp. 33-40.

(3) Walter Isard : *Location and Space Economy,* New York, The Technology Press of Massachusetts Institute of Technology and John Wiley, 1956.

(4) 舘稔：『形式人口学』，東京，古今書院，1960年.

(5) Paul Flaskämper : *Bevölkerungsstatistik,* Hamburg, Felix Meiner, 1962.

(6) Harold W. Kuhn and Robert E. Kuenne : "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics," *Journal of Regional Science*, Vol. 4, No. 2, Winter, 1962, pp. 21-33.

(7) 西岡久雄：『経済地理分析』，東京，大明堂，昭和51年(1976年).

(8) 奥野隆史，高森寛：『点と線の世界』，東京，三共出版，1976年.

アイザード教授の著書からは，輸送費最小の地点（あるいは人口分布の解析における人口中心点）がいかに興味あるものであり，経済活動の立地の研究にいかに密接な関係をもっているかを知ることができた．特に，この著書の第11章はこの点に関する議論を中心として書かれ，この点に関する筆者の関心を高めさせた。

舘稔博士の著書では，1960年以前における人口重心や人口中心点の研究に関する詳細な説明がなされ．この著書によって，これらの研究の内容をかなり明確に知ることができた．

江沢教授監訳の『ウェーバー工業立地論』は，経済学の立場から輸送費最小の地点を論じたウェーバーの研究を知る上で不可欠の参考書であった．また，ウェーバー自身の書いた原典 *Ueber den Standort der Industrien* は，彼自身の用いた諸概念を示す言葉を知るために役立った．フリードリッヒによるこの書物の英語への翻訳書も江沢教授監訳の書物と同様にウェーバーの考え方を知るために役立った．

フラスケンパー教授の著書では，人口統計学において人口の分布の解析が重要であることが強調され，筆者のこの分野の研究意欲を刺戟した．

イールズ教授の論文は，人口重心と人口中心点との差異を論じたものであるが，この論文も筆者の人口の空間的構造の分析の研究への意欲を刺戟した．

クーン教授とキーニー教授の論文は，人口中心点の数学的解法ならびにこの解法に関する簡単な研究史を論じたものであるが，筆者は，この論文を見て，人口分布の解析に関する研究を集めた書物を書きたいと思い，フラスケンパー教授，イールズ教授およびクーン，キーニー両教授の論文の翻訳を掲載した小冊子（鈴木啓祐訳編：『新しい人口統計学』，東京，佑学社，昭和52年（1977年))をつくった．また，これらの著書と論文が筆者にこの人口中心点の研究史を書く動機を与えた．

西岡教授の著書では，輸送費最小の地点に関する種々の研究が挙げられ，この著書から多くのことを学ぶことができた．特に西岡教授が「ポール（極）の原理」と訳されているラウンハルトの研究結果ならびに「テリエの方法」についての説明は，これらの研究結果や方法を知る上で重要な研究資料となった．

奥野隆史，高森寛両教授の著書は，シュタイナーの研究について詳細な説明がおこなわれ，この論文を書く際，やはり重要な研究資料となった．

この論文は，筆者にとって基本的な参考文献となったこれらの著書や論文を基礎とし，これ以外の数多くの文献も追加的に用いて書き上げられたものである．

1) Paul Flaskämper : *Bevölkerungsstatistik,* Hamburg, Verlag von Richard Meiner, 1962, S. 108.

鈴木啓祐訳編：『新しい人口統計学，地域の人口分析』，東京，佑学社，1977年，55頁.

人口中心点（Zentralpunkt der Bevölkerung）あるいは，最小距離の点（Punkt der Kleinsten Entfernungssumme）——直訳をすれば，最小距離和の点，あるいは距離和最小点と訳すべきであろう——である。

この人口中心点は，公共施設，たとえば，公園，学校，図書館，公会堂，市役所等の設置場所として用いられ得る地点といえよう。公共施設をこの地点に設置するとき，それを利用する人々の移動距離の総和が最小となるからである。

また，ウェーバー（Alfred Weber）は，この種の地点が生産地点としてえらばれることを主張した[2]。すなわち，生産物の原料を生産地に輸送し，生産された物資を消費地へ輸送することを必要とする生産者は，その物資の生産地を，原料と生産物の総輸送費を最小にするような地点，すなわち，最小距離の点に設置しようとするのである。

このように，人口中心点，あるいは，最小距離の点は，われわれの生活や活動にとって密接な関係をもっている点である。しかしながら，驚くべきことに，この点に関して，きわめて長い研究史が存在し，しかも，この点が，他の性質をもった点——すなわち，人口重心——と同じであるというような誤った知識をもっていた時代が存在したのである。そして，この点の一般的な決定方法は，きわめて最近，正確には，1962年，クーン（Harold W. Kuhn）とキーニー（Robert E. Kuenne）とによって発見された[3]。

ここでは，この人口中心点の研究史を概観しながら，この点の性質についての詳細な検討を試みたいと思う。

II　アメリカ合衆国センサス報告書における人口重心の測定

（1）ウォーカーの考察

人口重心によって人口の分布状態を定量的に観察し，それをはじめて公式の報告書に発表した人は，フランシス・A・ウォーカー（Francis A. Walker）であるといえよう[4]。彼は，エール大学のシェフィールド・サイエンティフィック・スクール（Sheffield Scientific School of Yale College）の経済学および歴史学の教授であった。彼は，1874年に出版された，1870年のアメリカ合衆国第9回センサスの報告書の中で，つぎのように述べている。

> 「人口重心」を，合衆国における公的印刷物に載せるべきかどうかは筆者等の間での重要な議論の的である。しかし，人口重心は，興味ある，しかも重要な観察対象であり，「国家の進歩」を示す地図の中にとり入れる価値が十分にあると判断される。

そして，人口重心について，彼は，

> もし，国全体が重量がなく，しかも，重量のある物を乗せることができる平面であり，実際，その平面の上には，ある時点に観察された人口が，現実に存在する状態と同じ状態で分布しているとすれば，その点をその平面の支点とするとき，その平面は均衡状態に達する。ただし，人口の構成要素は，それぞれ同一の重量をもち，それらは，支点に対し，支点からの距離に比例した影響力を与えると仮定する。簡単にいうならば，その点は，1国の人口の重心である。

と説明している。この定義が，アメリカ合衆国において，公式の報告書の中ではじめてなされた人口重心の定義である。人口重心について細

---

2) Alfred Weber : *Ueber den Standort der Industrien*, Erste Teil, *Reine Theorie des Standortes, Mit einem mathematischen Anhang von Georg Pick*, Tübingen, J. C. B. Mohr, 1922.

3) 鈴木啓祐訳編：前掲書，5-7頁.

4) Walter Crosby Eells : "A Mistaken Conception of the Center of Population," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 25, March, 1930, pp. 33-40.
鈴木啓祐訳編：前掲書，107頁.
ただし，イールズによれば，非公式の文献には，ウォーカーが公式の文献の中で人口重心について論じる以前にも，人口重心に関する議論がおこなわれていた（Walter Crosby Eells : op. cit.，鈴木啓祐訳編：前掲書，107頁）

かい説明をおこなったフラスケンパーの著書にも，1874年以前にアメリカ以外の国でおこなわれた人口重心の定義は指摘されていないので[5]，これが公式の報告書に掲載された人口重心の最も古い定義であるといえよう。

ウォーカーは，人口重心を上記のように定義した後，1790年の第1回センサス以後の人口重心をセンサスのカウンティ別資料を用いて実際に計算し，『合衆国の統計地図（Statistical Atlas of the United States)』に発表した[6]。ただし，この地図における1840年と1850年（第6回および第7回のセンサス）の人口重心の計算には，ヒルガード（J. E. Hilgard）によって作成された1840年から1870年までの表と地図[7]とが用いられた。

（2）スローンの誤った記述とイールズのその誤りの指摘

ウォーカーの人口重心の定義は，人口重心の性質を明示するものであり，決して誤ったものではなかったが，1920年におこなわれた第14回のセンサスの報告書の別冊[8]に書かれたスローン（Charles S. Sloane）による人口重心の意味に関する記述には誤りがあった。この別冊には，つぎのように書かれている。

「人口重心」という術語がセンサス報告書で用いられているが，これは，しばしば，この術語に与えられている意味とはやや異なった専門的意味をもっている。この点は，しばしば，人口をちょうど半分に分ける東西の直線との交点であると理解されている。この交点は，ある意味では，人口の中心点である。しかしながら，この点は，中位点と名づけられるべきものであって，ここで人口重心と呼ばれる点とは区別されなければならない点である。「人口の中心点」と名づけられる点は数多くあるが，センサスにおいて「人口の中心点」と名づけられた点は，合衆国の重心（center of gravity）と考えられる点である。いいかえれば，合衆国をこの点で支えたとき平衡状態に達する点である。ただし，ここでは，合衆国を重みのない平面とみなし，その上に人口が分布し，人口の各構成要素は，同一の重みをもっていて，その重みの影響は，その点から支点までの距離に比例しているという仮定が置かれている。したがって，平衡状態を与える支点はその重心になければならず，その点がセンサスにおいて用いられている「人口の中心点（center of population)」である。この点は，しばしば「中位点」と名づけられる点と混同されている。……もし，合衆国のすべての人々がある1つの地点に集合しなければならないとしたら，その地点は人口重心である。この地点は，もし彼らが，その居住地からその集合地点へと移動する場合，その2地点を結ぶ直線に沿って移動すると仮定するならば，彼らが移動する距離の和を最小にする。中位点には，このような性質がない[9]。

この文章には，重大な誤りがある。この誤りを発見し，論証した人がイールズ（Walter Crosby Eells)であった。彼は，1930年，「人口重心に関する誤った概念（A Mistaken Conception of the Center of Population)」という論文を書き，その中でその誤りを指摘した[10]。

5) Paul Flaskämper : op cit., S. 112-113.
　鈴木啓祐編著：前掲書，61頁.

6) Francis A. Walker (ed.) : *Statistical Atlas of the United States, based on the Results of the Ninth Census, 1870,* Part II "The Progress of the Nation," Washington, 1874, p. 5.

7) J. E. Hilgard : "The Advance of Population in the United States," *Scribner's Monthly,* 4 : 214, June, 1872.
　Walter Crosby Eells: "The Center of Population —a Prophecy and Its Fulfilment," *The Scientific Monthly,* 20, January, 1925, pp. 78-84.

8) Charles S. Sloane : *Center of Population and Median Line and Centers of Area, Agriculture, Manufactures, and Cotton,* Washington, Bureau of the Census, 1923, p. 5.
　W. C. Eells : op. cit., p. 33.
　鈴木啓祐訳編：前掲書，104頁.

9) 鈴木啓祐訳編：前掲書，104-105頁.

10) W. C. Eells : op. cit. (1930).

イールズによれば，上記の引用文中，「もし」以下の文章に誤りがあるのである。すなわち，その文章では，人口重心が移動距離の和を最小とする点とみなされているが，一般に，この点は決してそうした性質をもっていないのである。

彼はまず，人口重心が，総移動距離最小(minimum aggregate travel) という性質のないことを論証するために，2つの例を挙げている。

まず第1の例は，3人の人々が，1人ずつ，それぞれ，1直線上の3つの点 (1, 0)，(2, 0) および (15, 0) となるように配置されていたとき，人口重心を求めてみると，その点は，(6, 0) となる。この点に3人が集合するときの移動距離の和は，18である。しかし，それよりも移動距離の和が小さくなる点がある。それは，(2, 0) という点である。この点へ3人が集合するために移動する距離の総和は14である。このことから，少なくとも，人口重心は，移動距離の和が最小となる点でないことが明らかとなる。

第2の例は，5人の人々が一直線上に配置されていない場合の例である。すなわち，この例では，5人の人々が，それぞれ，(0, 1)，(0, −1)，(2, 0)，(14, 1)，(14, −1) という位置に分布しているとする。このときの人口重心は，(6, 0) であり，これら5人の人々がすべて，この地点に移動しなければならないならば，全体で32.290の距離を動かなければならなくなる。しかし，(6, 0) という点ではなく，(2, 0) という点に集まるようにすれば，この点までの点への移動距離の総和は28.555となる[11]。このことから，この点が移動距離最小の地点であるかどうかは別として，少なくとも，人口重心よりも移動距離の和の小さい地点があることが明らかとなる。

イールズが見いだした人口重心よりも移動距離の和が小さい地点は，彼も指摘するように，「中位点 (Medianpunkt, median point)」と呼ばれる点である。中位点は，一般に人々の分布状態が与えられているとき，その各人にある方向の一方の端から順に他方の端へ向って配列の順に番号を与え，その中央の番号の人の位置を示す直線と，この直線と同じ方向に向って一方の端から，同様に番号を与えたときの中央の番号の人の位置を示す直線（それぞれの位置を示す直線は，番号を与えるときに決めた順序づけの方向と直交する直線で示される）とが交わる点である。人口分布が，特に，一直線上に与えられたときは，この中位点は，その点までの人々の移動距離の和を最小にする点である[12]。こうした特性は，下記のようにして証明される。

いま，一直線上に分布する $m(=2n+1)$ 人のうち第 i 番目の人の見いだされる位置を $x(i)$ とする。そして，

$$x(1)<x(2)<\cdots<x(n)<x(n+1)<\cdots<x(2n+1) \qquad (2.1)$$

と仮定する。このとき，中位点の位置は $x(n+1)$ である。すべての点のこの点までの距離の和を $D(n+1)$ としよう。このとき，

$$D(n+1)=\sum_{i=1}^{n}\{x(n+1)-x(i)\}+\sum_{j=n+2}^{2n+1}\{x(j)-x(n+1)\} \qquad (2.2)$$

となる。$x(n+1)$ 以外の点の位置，たとえば $x(n+2)$ の位置への人々の移動距離の和 ($D(n+2)$) を算出してみると，

$$D(n+2)=\sum_{i=1}^{n+1}\{x(n+2)-x(i)\}$$

11) W. C. Eells : op. cit. (1930).

12) 直線上に点が分布するとき，その各点から中位点までの距離の和がその他の点までのそれに比して最小となるという性質はイールズの研究によって得られた結果ではなく，当時すでに知られていた結果であり，イールズは，この事実の説明が記載されている下記のような文献を挙げている（鈴木啓祐訳編：前掲書，109頁）.

A. L. Bowley : *Elements of Statistics*, London, 1902, p. 126.

W. I. King : *Elements of Statistical Method*, New York, 1913, p. 128.

C. J. West : *Introduction to Mathematical Statistics*, Columbus, 1920, p. 47.

T. L. Kelley : *Statistical Method*, New York, 1923, p. 74.

G. I Gavett : *First Course in Statistical Method*, New York, 1925, p. 117.

R. W. Burgess : *The Mathematics of Statistics*, Boston, 1927, p. 143.

鈴木啓祐訳編：前掲書，108-109頁.

$$+\sum_{j=n+3}^{2n+1}\{(x(j)-x(n+2)\} \tag{2.3}$$

となる。他方，

$$x(n+2)-x(i)=\{x(n+2)-x(n+1)\}+\{x(n+1)-x(i)\} \tag{2.4}$$

$$x(j)-x(n+2)=\{x(j)-x(n+1)\}+\{x(n+2)-x(n+1)\} \tag{2.5}$$

であるから，

$$\begin{aligned}D(n+2)&=\sum_{i=1}^{n+1}\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+\sum_{j=1}^{n+1}\{x(n+1)-x(i)\}\\&\quad+\sum_{j=3}^{2n+1}\{x(j)-x(n+1)\}\\&\quad-\sum_{j=n+3}^{2n+1}\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&=(n+1)\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad-(n-1)\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n+1}\{x(n+1)-x(i)\}\\&\quad+\sum_{j=n+3}^{2n+1}\{(x(j)-x(n+1)\}\\&=2\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n+1}\{x(n+1)-x(i)\}\\&\quad+\sum_{j=n+3}^{2n+1}\{x(i)-x(n+1)\}\\&=2\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\{x(n+1)-x(i)\}\\&\quad+\sum_{j=n+2}^{2n+1}\{x(j)-x(n+1)\}\\&\quad-\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&=\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\{x(n+1)-x(i)\}\\&\quad+\sum_{j=n+2}^{2n+1}\{x(j)-x(n+1)\}\\&=\{x(n+2)-x(n+1)\}\\&\quad+D(n+1)\\&>D(n+1)\end{aligned} \tag{2.6}$$

同様の方法で，$m=2n$(偶数)のとき，中位点（このときは，第n番目と第 $n+1$ 番目の人の各位置の中間にある区間の任意の1点である）が移動距離最小の場所であることが証明される。

しかし，人口の分布状態が一直線上でないときは，必ずしも，上記のように，中位点が移動距離最小の点とはならない。

イールズの第2の例は，中位点が偶然に人口重心よりも小さな移動距離の和を示したが，このような例では，必ずしも，こうした結果は得られない。実際，イールズもつぎのような例を用いて，このことを明らかにしている。すなわち，13人の人々が (0, 10)，(0, 0)，(2, 10)，(2, 8)，(2, 2)，(2, 0)，(4, 5)，(8, 8)，(8, 4)，(8, 2)，(9, 6)，(10, 10)，(10, 0) の位置に分布しているときは，人口重心は，(5, 5) であり，ここへの移動距離の和は，65.602となる。これに対して，中位点は (4, 5) となり，ここまでの移動距離の和は65.630となる[13]。ここでは，人口重心の方が移動距離の和を小さくする点となっている。

Ⅲ 誤った意味付けの普及とイールズの研究の影響

（1）センサス報告書における誤った記述

人口重心の誤った解釈は，上述のように，スローンによって，1923年に与えられたが，このような誤った解釈は，すでに，1914年に出版された第13回センサス（1910年）の報告書に書かれ，そこでは，

人口重心が州の首都の近辺にある州は，わずか9個である。その州の名は，アーカンサス，デラウェア，インディアナ，ミズーリ，モンタナ，ニューハンプシャー，ロードアイランド，サウスカロライナ，およびバーモントである。人口重心は，すべての人々から公平な距離にあるとみなしえる点であるから，もし，合衆国のすべての人々がある1つの地

13) W. C. Eells : op. cit. (1930).
鈴木啓祐訳編：前掲書，110頁.

点に集合しなければならないとしたら，しかも，また彼らが、その居住地からその集合地点へと移動する場合，その2地点を結ぶ直線にそって移動すると仮定するならば，その集合地点は人口重心である。この点はすべての人々が移動する距離の和を最小にする[14]。

という1923年にスローンによって書かれた文章のうち「人口重心は，すべての人々から」以下の部分と本質的に変りのない文章が書かれている[15]。また，同様のことがこのセンサスにおける統計地図にも書かれた[16]。

（2）社会学の分野の書物における誤った記述

イールズはスタンフォード大学（Stanford University）において講義をおこなっていた研究者であるが，彼の教えていた学生，リチャード・ベンソン（Richard Benson）は，社会学の分野における書物にも人口重心に関する誤った記述があることを見いだした[17]。

その第1のものは，マンロー（William B. Munro）とオザンヌ（Charles E. Ozanne）の著書である。彼らは，彼らの著書『社会市政学（*Social Civics*）』の中で，簡単に，

人口重心は，最大の数の人々が，最小の移動距離で到達できる場所である。

と述べた[18]。第2のものは，やや詳細な記述であり，

人口重心は，……合衆国の人々がある1点に直線経路を通って集合したとき，その全距離が最小となる点である。

と述べられているものである。これは，当時合衆国ではよく知られていたタウン（Eara T. Towne）の書いた教科書『社会問題（*Social Problems*）』の中に書かれている[19]。第3番目の記述は，ラップ（John A. Lapp）による『実践社会科学（*Practical Social Science*）』の中に書かれたものである。ここでは，合衆国のセンサス報告書の文章を省略なしで引用し，人口重心が移動距離最小の点であることを示した[20]。

（3）イールズの論文の反響とメトロン誌上の人口重心の考察

イールズが1930年にセンサス報告書における人口重心の意味の説明に誤りのあることを指摘すると，人口重心に関する関心が高まり，館によれば，わが国では，はやくも，井上謙二が，1931年に人口重心について論文を書いている[21]。そして，1933年には，リンダー（Forrest E. Linder），グリフィン（C. E. Griffin），ガルバニ（Galvani），ダグラス（Douglas），スケーツ（E. Scates），ジニ（C. Gini），ボルドリニ（Boldrini），ベネレ（Venere）等が参加し，ロシヤ，オーストラリア，インド，日本，ドイツ，スイス，イタリア，ポーランド等の人口重心を計算し，メトロン（*Metron*）誌に発表した[22]。

他方，合衆国のセンサス報告書においては，人口重心ならびに人口中位点も移動距離最小点でないことが明らかとなったため，1930年の第15回人口調査報告以後移動距離最小点に関する

14） C. S. Sloan : op. cit., p. 14.
15） W. C. Eells : op. cit. (1930), p. 34.
鈴木啓祐訳編：前掲書，106頁.
Bureau of the Census : *Thirteenth Census of the United States, Vol. I, Population 1910*, Washington, Bureau of the Census, 1913, p. 45.
16） W. C. Eells : op. cit. (1930), p. 34.
鈴木啓祐訳編：前掲書，106頁.
Bureau of the Census : *Statistical Atlas of the United States 1910*, Washington, Bureau of the Census, 1914, p. 25.
鈴木啓祐訳編：前掲書，106-107頁.
17） W. C. Eells : op. cit. (1930), p. 33, pp. 34-35.
18） William B. Munro and Charles E. Ozanne : *Social Civics*, New York, 1922, p. 21.
19） Eara T. Towne : *Social Problems*, New York, 1916, p. 23.
20） John A. Lapp : *Practical Social Science*, New York, 1926, p. 17.
21） 館稔：『形式人口学』，東京，古今書院，昭和35年，416頁.
井上謙二：「人口の重心(1)」，『統計集誌』第598号，1931年4月.
22） *Metron*, Vol. XI, Nos. 1, 2, 1933.
館稔：前掲書，416頁.

説明を削除した[23]。

Ⅳ　人口重心の測定

（1）アメリカにおける人口重心の測定

すでに述べたように，人口重心は，不幸にして，移動距離最小の地点として誤って理解されたが，人口重心をそのように誤って理解せず，人口重心は，ウォーカーの示したような文字通り「人口の重心」であると理解すれば，人口重心の計算自体には何らの不明確性や不合理性は存在しない。むしろ，この点は，一種の人口分布の中心を示す値として利用され得る。

アメリカ合衆国における公式の文献に掲載された人口重心の最初の計算は，1874年出版の統計地図に示された第9回センサスの結果を用いておこなわれた人口重心の計算である[24]。

合衆国センサス報告書では第12回以後，1790年からの人口重心を計算し掲載している[25]。1900年の第12回センサス報告書には1790年から1900年までの人口重心の位置が経度，緯度によって示されているが[26]，1910年の第13回センサス報告書には，1910年の人口重心の位置を示す地図（ここでは，1910年の人口重心がちょうどインディアナ州（Indiana）のブルーミントン（Bloomington）の位置に一致したことが示されている[27]）と1790年から1910年までの人口重心の位置を示す地図[28]とが，人口重心の経度，緯度の位置を示す表[29]と共に掲載された。

1920年のセンサス報告書にも，1910年のそれにおける表や地図と同様の表や地図が掲載された[30]。しかしながら，1930年，イールズの指摘が現われたため，1930年の第15回人口調査報告以後，人口重心が移動距離最小の性質をもつという説明が削除された[31]。センサス報告書では，移動距離最小に関する説明は第15回人口調査報告以来削除されたが，その後も，人口重心の計算結果は，掲載されている[32]。

（2）フランスにおける人口重心の測定

フランスでは，ユベール（M. Huber）が，1901年と1911年におけるこの国の人口重心に関する研究をおこなっている[33]。

（3）ドイツにおける人口重心の測定

ドイツにおける人口重心の計算は，アメリカのそれのように規則的におこなわれていない。しかし，測定回数は少ないながらも，まったくそうした測定がおこなわれなかったとはいえな

23) 舘稔：前掲書，416頁.
24) Fransis A. Walker (ed.) : *Statistical Atlas of the United States, based on the Results of the Ninth Census, 1870,* Part II, "The Progress of the Nation," Washington, 1874, p. 5.
鈴木啓祐訳編：前掲書，107頁.
25) 舘稔：『形式人口学』，東京，古今書院，昭和35年，415頁.
26) Bureau of the Census : *Twelfth Census of the United States taken in the Year 1900, Special Reports, Population,* Part 1, p. XXVI, Table XIII, Washington, Government Printing Office, 1906.
27) Department of Commerce, Bureau of the Census : *Thirteenth Ceusus of the United States taken in the Year 1910,* Vol. 1, *Population 1910, General Report and Analysis* (Prepared under the Supervision of William C. Hunt), Washington, Government Printing Office, 1913, p. 47.
28) Department of Commerce, Bureau of the Census: ibid., p. 49.
29) Department of Commerce, Bureau of the Census : ibid., p. 48.
30) Department of Commerce, Bureau of the Census : *Fourteenth Census of the United States taken in the Year 1920,* Vol, 1, *Population 1920, Number and Distribution of Inhabitants* (Prepared under the Supervision of William C. Hunt), Washington, Government Printing Office, 1921, pp. 33-35.
31) 舘稔：前掲書，416頁.
U. S. Department of Commerce, Bureau of the Census : *Fifteenth Census of the United States : 1930, Population* Vol. I (Prepared under the Supervision of Leon E. Truesdell), Washington, United States Government Printing Office, 1931.
U. S. Department of Commerce, Bureau of the Census : *Fifteenth Census of the United States : 1930, Population Bulletin,* First Series United States Summary, Washington, United States Printing Office, 1931.
32) 舘稔：前掲書，425頁.
United States, Bureau of the Census : "Center of Population of the United States : 1950," *Geographic Reports, Series GEO,* No. 2, Sept. 30, 1951.
33) 舘稔：前掲書，425頁.
Michel Huber : *Cours de Démographie et de Statistique Sanitaire,* III, *État de la Population d'Après le Recensement,* Actualités Scientifiques et Industrielles, 786, Paris, 1939, p. 40.

い。すなわち，1910年の旧ザクセン王国（das frühere Königreich Sachsen）の人口重心はチェムニッツ地域（Bezirk Chemnitz）のハイニヒェン（Heinichen）の近くのファルケナウ地区（Gemeind Falkenau）にあるということが算出されたことがある。そして，1925年には，上記の地点からわずか1キロメートルほど北に移動したことが確認された[34]。

また，ドイツ国（ドイツ帝国（Deutsche Reich））全体の人口重心は1910年から1925年まで算出された。その結果によれば，1925年には，ドイツの人口重心はザクセン地方（Provinz Sachsen）の都市ヘルドゥルンゲンにあった。そして，1910年には，それは，その都市の東方6キロメートルの地点にあった。すなわち，人口重心は，15年間に6キロメートル西方へ移動したのである[35]。

（4）日本における人口重心の測定

舘によれば，わが国においては，1922年の高岡による北海道の人口重心と中位点（高岡や舘はこれを正中点と呼んでいる）の研究が，人口重心の最初の測定であるとみなし得る[36]。

次いで，井上謙二が1928年から1931年まで人口重心について測定と論評をおこなっている[37]。

平木文雄は，1949年に明治以前，以後におけるわが国の人口重心，ならびに，東北，関東地方の府県別人口重心を測定した[38]。

その後，舘稔，上田正夫，斎藤聡，東京都，川上光雄，米谷静二，等によって，わが国の人口重心が論じられた[39]。

わが国の公式の国勢調査報告書に人口重心の記載がはじめて現われた時点は，上記の先駆的諸考察の後であり，1955年であった。この年に，総理府統計局は，昭和10年と25年の都道府県ならびに全国の人口重心を算出し，その結果を昭和25年国勢調査報告書に記載した[40]。

舘は，1960年，人口重心に関する諸考察を詳細に検討し，イールズの人口重心に対する議論とこれに影響されておこなわれた人口重心に関する研究，特にメトロン誌に掲載された，リンダー等の調査研究とを「人口重心論争」と名づけた[41]。人口重心論争という名称はきわめて適切な名称であるが，この名称によって示される議論は，1923年のスローンの記述にはじまり，1930年のイールズの「誤り」の指摘，そして，舘の指摘する1933年におけるリンダー等の計測に終ると考えることが適当であろう。

34) Felix Burkhardt : „Der statistische Schwerpunkt und seine Bedeutung für Theorie und Praxis," Allg. Stat. Arch. 19 Bd., 1929, S. 473.

35) G. Wegemann : „Der Bevölkerungsschwerpunkt des Deutschen Reichs," Petermanns Mitteilungen, 49 Bd., 1903, S. 210.
ただし，この論文の発表年は，明らかに誤植によって不正確であるといえる．使用された活字が正しいとすれば，1930年であろう．1930年は，論文の内容から考えて矛盾のない年である．なお，この誤植のある文献の記載は，P. Flaskämper : op. cit., p. 116 ならびに鈴木啓祐訳編：前掲書，66頁にある．

36) 舘稔：前掲書，416頁．
高岡熊雄：「北海道に於ける人口中心及び正中点に関する研究」（第1報）（第2報），『農政問題研究』，1922年，（第3報）『農政問題研究』，1929年，（第4報）『農業経済研究』第8巻第1号，1932年1月．
高岡熊雄：„Der Schwerpunkt der Bevölkerung in Hokkaido, Japan," 1930年国際統計協会会議提出報告，1930年．

37) 井上謙二：「我国に於ける人口の重心と其の移動に関する研究」，『統計集誌』第569号，1928年11月．
井上謙二：「第1回国勢調査現在に於ける人口の重心」，『統計集誌』第582号，1929年6月．
井上謙二：「誤れる人口重心の概念」，『統計集誌』第588号，1930年6月．
井上謙二：「人口の重心(1)-(6)」，『統計集誌』第598-603号，1931年4-10月．
舘稔：前掲書，416頁．

38) 平木文雄：「人口の重心に関する研究」，『民族衛生』第16巻第1号，第2号，1949年，1，3月．
舘稔：前掲書，416頁．

39) 舘稔，上田正夫：「日本の人口」，『日本地理新大系 第2巻 社会，経済』，1952年，141-142頁．
舘稔，上田正夫：「人口」，木内信蔵編：『人口，集落地理』，東京，朝倉書店，昭和29年．
斎藤聡：「人口の重心について」，『統計東京』第2巻第4号，1954年4月．
東京都総務局企画部：「関東地方における‘人口の重心’について」〔謄写〕，首都制度資料15，1954年9月．
川上光雄：「東京都の人口の重心の軌跡について」，『新都市』第8巻第9号，1954年9月．
米谷静二：「鹿児島県の人口重心」，『統計鹿児島』第53号，1954年．

40) 総理府統計局：昭和25年国勢調査報告，第8巻，最終報告書，1955年，75-79頁．
舘稔：前掲書，417頁．

41) 舘稔：前掲書，416頁．

なお，最近では，1975年の東京都の人口統計の解説書の中に，東京都の人口重心が記載された[42]。

V　人口重心の性質

IIおよびIIIにおいて，人口重心が，移動距離最小の点，すなわち，人口中心点と誤解されたという事実を述べたが，なぜこのような結果が生じたのであろうか。ここでは，その問題につき，詳細な考察をおこなってみたい。

まず，人口重心 (center of population) の定義を明示しておこう。座標 (x_i, y_j) $(i=1, 2, \cdots, n)$ をもつ n 個の地点に，それぞれ P_i という人口が存在したとき，人口重心の座標 $(\overline{X}, \overline{Y})$ の $\overline{X}$ および $\overline{Y}$ の値は，

$$\overline{X}=\frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} \tag{5.1}$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \tag{5.2}$$

によって示される[43]。

このような座標 $(\overline{X}, \overline{Y})$ は，決して，移動距離最小の点，より厳密に表現すれば移動距離の和が最小となる点，のもつ座標ではない。これは，移動距離の2乗の和が最小となる点である。そのことは，つぎのような証明によって明らかにし得る。

いま，任意の点 (x, y) と人口 P_i の存在する座標 (x_i, y_i) までの距離 d_i は，

$$d_i=\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2} \tag{5.3}$$

である。したがって，

$$d_i^2=(x_i-x)^2+(y_i-y)^2 \tag{5.4}$$

となる。すべての人の点 (x, y) までの距離の2乗の和 S は，式 (5.4) を用いると，

$$\begin{aligned} S&=\sum_{i=1}^{n} P_i d_i^2 \\ &=\sum P_i\{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。この S は，x，y を動かして最小にさせることができるが，S を最小にさせる x，y は，

$$\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{5.6.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=0 \tag{5.6.2}$$

という条件を満足させる x，y である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x}&=\sum P_i \frac{\partial}{\partial x}(x_i-x)^2 \\ &=-2\sum P_i(x_i-x) \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=-2\sum P_i(y_i-y) \tag{5.7.2}$$

となるから，これらの式の値を0とすれば，

$$x=\frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} \tag{5.8.1}$$

$$y=\frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \tag{5.8.2}$$

となる。この x，y の値は，人口重心の座標に一致する。

人口重心が移動距離最小の点と誤解された理由は，「移動距離の2乗の和を最小とする点」と「移動距離の和を最小とする点」とが同じものであるという直観的判断によって生じたものであると思われる。実際に，ある点 (x, y) からの移動距離の和を D として，これを最小とさせる点を見いだしてみると，人口重心とは異なる点が算出される。しかし，この点を示す式の形がやや複雑であるため，その式がどのような位置を占める点であるかを完全に検討することができなかったのであろう。そして，その D を最小とする点も S を最小とする点も同一であるであろうと簡単に判断してしまったのであろう。

ここで，D を最小とさせる点 $(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)$ を求めてみよう。まず，人口 P_i の存在する地点 (x_i, y_i) からの距離は，式 (5.3) で示されるから，D は，

$$D=\sum P_i d_i \tag{5.9}$$

となる。

$$\frac{\partial D}{\partial x}=0 \tag{5.10.1}$$

$$\frac{\partial D}{\partial y}=0 \tag{5.10.2}$$

とさせる x，y が $\overline{X}^*$，$\overline{Y}^*$ であるから，ここで

---

42) 東京都総務局統計部人口統計課編：『東京都の人口統計のあらまし』，東京，東京都広報室普及部都民資料室，昭和50年，30-31頁.

43) 鈴木啓祐：『現代統計学入門』，東京，交通日本社，昭和51年（第3版），251-254頁.
　鈴木啓祐訳編：『新しい人口統計学，地域の人口分析』，東京，佑学社，1977年，139-140頁.

$\partial D/\partial x$, $\partial D/\partial y$ を求めなければならない。式(5.3)は複雑であるので，

$$Z_i=(x_i-x)^2+(y_i-y)^2 \tag{5.11}$$

として，式(5.10.1)，(5.10.2)を求めてみると，式(5.10.1)に対しては，

$$\frac{\partial D}{\partial x}=\sum\frac{\partial}{\partial Z_i}P_iZ_i^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial Z_i}{\partial x} \tag{5.12}$$

が得られる。ここでさらに，

$$u_i=x_i-x \tag{5.13}$$

とすれば，

$$\frac{\partial D}{\partial x}=\frac{1}{2}\sum P_iZ_i^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}u_i^2\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$$=-\sum P_i\frac{1}{Z_i^{\frac{1}{2}}}u_i \tag{5.14}$$

が得られる。$Z_i^{\frac{1}{2}}$ は d_i に等しく，u_i は式(5.13)で定義されているので，式(5.14)は，

$$\frac{\partial D}{\partial x}=-\sum P_i\frac{1}{d_i}(x_i-x) \tag{5.15}$$

が得られる。同様に，

$$\frac{\partial D}{\partial y}=-\sum P_i\frac{1}{d_i}(y_i-y) \tag{5.16}$$

が得られる。したがって，これらの値を0とさせるような x，y は，

$$x=k\sum P_i\frac{1}{d_i}x_i \tag{5.17.1}$$

$$y=k\sum P_i\frac{1}{d_i}y_i \tag{5.17.2}$$

となる。ただし，$k=(\sum P_i/d_i)^{-1}$ である。この x，yがここで求めようとする $\bar{X}^*$，$\bar{Y}^*$ の値である。しかし，これらの式の中には，$\bar{X}^*$，$\bar{Y}^*$ が知られたとき，はじめて知られる d_i という値が含まれているので，この式から直接に $\bar{X}^*$，$\bar{Y}^*$ がどのような場所にあるか知ることが困難である。このような結果が得られるために，「おそらく，$\bar{X}^*$，$\bar{Y}^*$ も $\bar{X}$，$\bar{Y}$ と同じ点を示す座標であろう」という簡単な想像が，上述のような人口重心に対する誤りを生じさせたと思われる。

この誤りを指摘した人がイールズであり，その点はどのような点であるかを明らかにした人が，クーンおよびキーニーなのである（イールズは，人口重心の意味の解釈の誤りを指摘はしたが，どのような点が，移動距離最小の点であるかを指摘し得なかった。彼は，実際，「合衆国においてどの地点が移動距離をもっとも小さくする地点かを検討することは興味あることである。インディアナ州のブルーミングトンの近くにある人口重心で会合をもつとよいのだろうか。あるいは，ブルーミングトンの北東に1マイルの地点にある中心点で会合をもつとよいのであろうか。また，これらよりさらによい第3の地点があるのであろうか。かなり複雑なこの種の問題を解くことは，著者以外の統計学者か数学者にゆだねることにしたい。より一般的な問題は任意の規模をもった人口の分布において，直線的な移動距離の和が最小となる地点を求めることである。筆者は，まだ，この種の一般的な問題の解を得ていない」といって，イールズが移動最小点を求めることができなかったこと，ならびに，イールズの時代には，$\bar{X}^*$，$\bar{Y}^*$ の求め方がまったく知られていなかったことを明示している)。

VI　人口中心点とその研究

(1) 初期の研究

はしがきに述べたように，人口中心点は，移動距離の和が最小となる点（地点）である。この点（地点）は，不幸にも，II，IIIおよびIVで述べたように，その性質が不明瞭——特に，移動距離の和を最小にさせるために求めなければならない偏微分の導関数の形が，その意味を直観的に理解するにはあまりにも不明瞭な形をもっている——であるため，一時，人口重心と同じものであると信じられた。しかしながら，これが人口重心とは異なったものであることがイールズによって指摘され，その後，人口分布の研究分野において，この点は，存在することは確実であるが，それを明確に見いだすことが困難な点とみなされるようになった。しかし，歴史的に調査してみると，この点は，かなり古くから，すなわち，早くも17世紀に研究され，人口重心とは区別されていたのである（それにもかかわらず，人口中心点は，その後の一時期において，人口重心と混同された。このことは，人

口中心点の位置の一般的な算出方法がきわめて困難であったことを明示しているといえよう)。人口中心点の最も古い研究は，クーンとキーニーの挙げた，フェルマー (Pierre de Fermat, 1601-1665年) の研究であろう。彼は，この点を最大最小の練習問題として提起した[44]。そして，この問題が，トリチェッリー(Evangelista Torricelli, 1608-1674年) によって幾何学的に解かれた[45]。

(2) シュタイナーの研究

19世紀に入ると，シュタイナー (J. Steiner) ——彼はベルリン大学に所属する有名な幾何学者であった[46]——が，興味ある問題に注目した。すなわち，彼は，a，b，c という3つの村を結ぶ道路をつくるとき，その道路の長さが最短になるようにするにはどのようにすればよいかという問題を考えた。この問題は，一般に，点 a，b，c が与えられたとき，第4の点 p から a，b，c までの距離 d_a, d_b, d_c の総和 S を最小にするには，p をどのような地点に置くべきかという問題によって示される。この問題の解，すなわち，

$$S=d_a+d_b+d_c \tag{6.1}$$

で定義される S を最小化させる位置は，点 a，b，c によって与えられる三角形 abc の内角がいずれも120°より小さいときは，p と a，b，c とを結んでできる3個の三角形 pab, pbc, および pac の頂点 p の内角がすべて120°となるように決めた頂点 p の位置であり，三角形 abc のある1つの頂点（たとえば a）の内角が120°以上の角度をもっているときは，その点（上記の仮定では a）の位置である[47]。

この解は，その解の得られる理由を考察すれば，何ら驚くべきものではないのであるが，一見，実に驚くべき内容の解であるといわなければならない。なぜかといえば，三角形 abc が，頂点 b と c との各内角が等しい二等辺三角形であった場合，頂点 a が頂点 b，c よりどれだけ遠ざかっても，式 (6.1) で定義される S の値を最小にする p は動かないという結論が，上記の解から得られるからである。この結論は下記のような簡単な証明から明らかにし得る。

前提によれば，図1の三角形の頂点 b と c の内角はつねに等しく書かれなければならない。頂点 a から辺 bc に垂線を立て，それが辺 bc と交わる点を d とし，直線 ad の長さを h とすれば，移動距離最小の点 p^* は，少なくともこの直線 ad 上にある[48]。したがって，もし，任意に動ける点 p を直線 ad 上に置き，p から d までの距離を x とすれば，点 p から頂点 a，b および c までの距離の総和 S は，

$$S=(h-x)+2\sqrt{A^2+x^2} \tag{6.2}$$

となる。ただし，A とは直線 bd あるいは dc の長さである。p を動かし，いいかえれば，x を動かし，S を最小にするため，

$$\frac{dS}{dx}=0 \tag{6.3}$$

44) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics," *Journal of Regional Science*, Vol. 4, No. 2, Winter, 1962, pp. 21-33.
鈴木啓祐訳編：前掲書，132-133頁.

45) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，133頁.

46) 奥野隆史，高森寛：『点と線の世界，ネットワーク分析』，東京，三共出版，1976年，162-163頁.
シュタイナーはアーベル (N. H. Abel) と共に財力のあるクレルレ (A. C. Crelle) に雑誌 *Journal für die reine und angewandte Mathematik* の創刊をすすめ，1862年にその創刊を実現させた人である(小堀憲：『数学史』，東京，朝倉書店，昭和51年（第11版)，150頁，262頁).

47) 奥野隆史，高森寛：前掲書，162-163頁.
鈴木啓祐訳編：前掲書，119頁.

48) 鈴木啓祐訳編：前掲書，112頁.
点 d から a へ向って任意の距離 x だけ離れた点 q から直線 bc に平行に直線を引き，この直線上の任意の点 p から点 bc までの距離 s を見いだすと，それは，

$$s=\frac{1}{\sqrt{x^2+(A+r)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(A-r)^2}}$$

となる．ただし，A は直線 bd の長さ，r は点 q から p までの距離である．s を最小にする r の値は，

$$\frac{ds}{dr}=0$$

とするような r の値である．

$$\frac{ds}{dr}=\{x^2+(A+r)^2\}^{\frac{1}{2}}(A+r)-\{x^2+(A-r)^2\}^{\frac{1}{2}}(A-r)$$

である．この値を0とさせるような r の値は0でなければならない．いいかえれば，点 p は，点 q の位置にあるとき，s が最小となる．

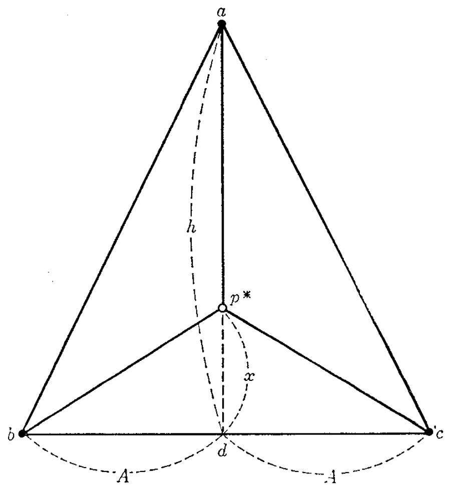


図1　2等辺三角形におけるSを最小にする点（p^*）

となるようなxの値（いいかえればp^*の位置）を求めてみると，

$$\frac{dS}{dx}=-1+\frac{2x}{\sqrt{A^2+x^2}} \qquad (6.4)$$

であるから，これを0とするの値は，

$$x=\frac{A\sqrt{3}}{3}=0.577A \qquad (6.5)$$

となる。このことは，Sを最小とする点p^*は点dからaの方向へ0.577Aだけ行った場所であることを意味する。この場所から点b，cに引いた2直線のつくる角度は120°となる。たとえ，その角度が120°であることが知られ得ないとしても，少なくともp^*は長さhとは無関係に一定であることだけは，式（6.5）から確実に知られる。このように，Sを最小にする点は，驚くべき性質があるのである。このことは，すでに，イールズによって指摘されている[49]。

シュタイナーの問題では，a，b，cが3個の村と仮定されているが，この問題は，「地点a，b，cがあり，そこにそれぞれ1人ずつの人が居住し，それらの人々が1点に集合するとき，それらの人々の移動距離の総和を最小にする地点はどこか」という問題と同等である。すなわち，3地点に1人ずつ居住する特別の人口分布における人口中心点を求める問題である。上記の点p^*はその人口中心点である。この点を求める問題は，今日，「シュタイナーの問題(Steiner's problem)」[50]，また，上述の点p^*を「シュタイナー点」[51]と呼んでいる。なお，この問題は1846年ファスベンダー（Ed. Fasbender）によっても研究された[52]。

クーラントとロビンス（R. Courant and H. Robbins）は，4地点に1人ずつ居住するときのシュタイナーの問題（1地点に集合するための移動距離を最小にする点を見いだす問題）を解き，この点は，4地点を結んでできる四辺形の対角線の交点であることを明らかにした[53]。

（3）ウェーバーの研究

Iにおいて触れたように，ウェーバーは，生産者の立地を決定する問題を考察した。この問題は形式的に見て，シュタイナーの問題の一種の拡張であった。すなわち，ウェーバーは，ある生産者が，原料供給地点P_1およびP_2から，それぞれ，重量M_1，M_2の原料の供給を受け，これらの原料から生産された重量M_3の工業生産物を消費地に輸送するとき，その生産者はどのような地点に立地すべきかを考えた[54]。そして，彼は，

$$C=d_1tM_1+d_2tM_2+d_3tM_3 \qquad (6.6)$$

で定義される費用Cを最小にするような地点を生産者の立地する地点とすべきであることを主張したのである。ただし，d_1，d_2，d_3はそれぞれ，生産者の立地Pから地点P_1，P_2，P_3まで

---

49) W. C. Eells : op. cit.(1930).
　鈴木啓祐訳編：前掲書，112頁.

50) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
　鈴木啓祐訳編：前掲書，119頁.
　R. Courant and H. Robbins : *What is Mathematics?* New York, 1941.
　K. Eisemann : "The Optimum Location of a Center," *SIAM Review*, 4, 1962, pp. 394-395.

51) 奥野隆史，高森寛：前掲書，163頁.

52) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
　Ed. Fasbender : *Journal für Mathematik*, 30, 1846, pp. 230-231 の論文.
　鈴木啓祐訳編：前掲書，132頁.

53) R. Courant and H. Robbins : op. cit., p. 306.
　鈴木啓祐訳編：前掲書，123頁.

54) A. Weber : op. cit.
　鈴木啓祐：「物流経済の計測」，林周二，中西睦編：『現代の物的流通』，東京，日本経済新聞社，昭和51年（第2版），301-302頁.

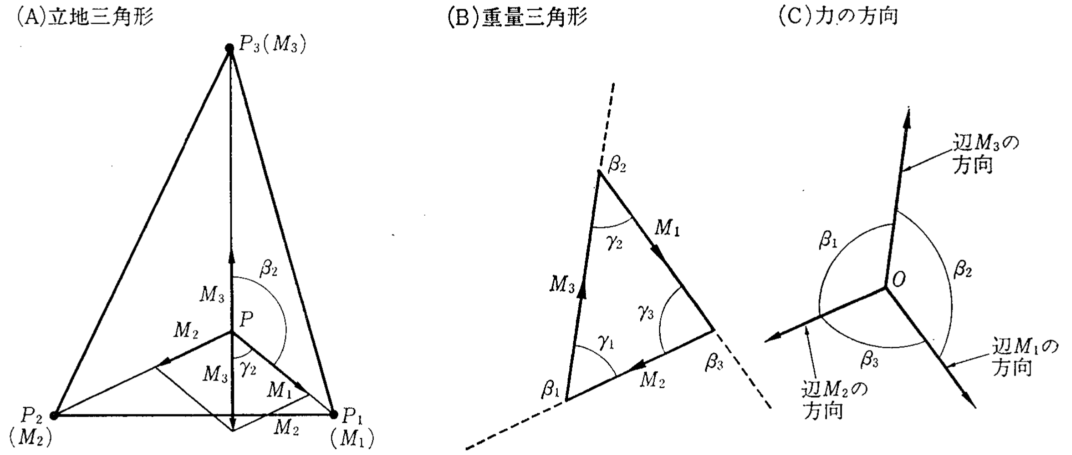


図 2　ウェーバーの問題を解く場合に書かれる図

の距離 t は，原料または製品の1単位重量を1単位距離だけ輸送する費用である。t は定数であるから，Cを最小にすることは，

$$K=d_1M_1+d_2M_2+d_3M_3 \qquad (6.7)$$

を最小にすることと同じであるので，ウェーバーの考察した問題は，人口 M_1，M_2，M_3 をもつ3つの地点 P_1，P_2，P_3 があり，これらの各地点の人々がすべてある1地点Pに集まるとき，その総移動距離を最小にするような地点Pの位置はどこにあるかという問題と同じになる。このような問題を，今日，「ウェーバーの問題（Weber problem)」と呼んでいる[55]。

彼は，たとえば，M_1 が大きいと，立地 P は重量 M_1 の原料の輸送費を節約するために，点Pの方へ近づかなければならないことが，ちょうど，点 P が重量 M_1 によって点 P_1 の方へ牽引されていることに似ているという点に着眼し，点Pの位置が力学的な原理に基づいた方法で得られることを明らかにした（(4)で述べるように，後に，パランダーが，さらに，数学的方法で，この問題を解決した)。

ウェーバーの方法は，つぎのようなものである。まず，点 P_1, P_2, P_3 の相対的位置を正確に示す図を図2(A)の三角形 P_1，P_2，P_3 のように書く（この三角形を彼は立地三角形（Standortsdreieck）と呼んだ)[56]。第2に，地点P_1，P_2，P_3 の各人口 M_1，M_2，M_3 に比例した長さの辺で図2(B)のような三角形を書く。これをウェーバーは，「重量三角形（Gewichtsdreieck)」と名づけた[57]。この重量三角形の3辺と平行な3本の直線をある任意の1点Oから引くと図2(C)のような図形が得られる。各直線によってできる角度β_1，β_2，β_3は，それぞれ，重量三角形の内角 γ_1，γ_2，γ_3 と関係をもち，$180°-\gamma_1$，$180°-\gamma_2$，$180°-\gamma_3$ となっている。いいかえれば，β_1，β_2，β_3は，γ_1，γ_2，γ_3 の補角となっている。この図形ができたならば，この図形を図(A)に移し，それを辺 M_1 の方向に P_1，辺 M_2 の方向に P_2，辺 M_3 の方向に P_3 があるように置く。その場合に得られる点Oの位置が求めようとする C または K を最小とする地点 P の位置である[58]。このとき，$\angle P_1PP_2=\beta_3$，$\angle P_1PP_3=\beta_2$，

55）鈴木啓祐訳編：前掲書，117頁，121頁，133頁.

56）江沢譲爾監修，日本産業構造研究所訳：『工業立地論』，東京，大明堂，昭和41年，264頁.
Alfred Weber : op. cit., S. 227.

57）江沢譲爾監修，日本産業構造研究所訳：前掲書，264頁.
Alfred Weber : op. cit., S. 227.
鈴木啓祐訳編：前掲書，96-97頁.

58）江沢譲爾監修，日本産業構造研究所訳：前掲書，265頁.
クーンとキーニーによれば，重量三角形による人口中心点の求め方については，1938年，ディーン（W. H. Dean Jr.）によって検討された.
W. H. Dean Jr.: "The Theory of the Geographic Location of Economic Activities," *Selections from the Ph. D. Thesis*, Ann Arbor, 1938, p. 19.
鈴木啓祐訳編：前掲書，120頁，133頁.
なおディーンの研究内容については，アイザードの著書に書かれている（Walter Isard : *Location and Space Economy*, New York, The Technology Press of Massachusetts Institute of Technology and John Wiley, 1956, p. 225.

$\angle P_2PP_3=\beta_1$ となる。また，直線 PP_1 上に P から M_1 の距離にある点，PP_2 上に P から M_2 の距離にある点，ならびに直線 PP_3 を延長して得られる直線上に P から M_3 の距離にある点を書けば，それらの3点と P 点によってできる平行四辺形は「力の平行四辺形 (Kräfteparallelogram)」[59]である。

ウェーバーは，このような理論的な方法と同時に，ゲオルグ・ピック (Georg Pick) によって提唱された機械的決定方法も挙げている[60]。ゲオルグ・ピックの提案した方法は，ピエル・ヴァリニョン (Pierre Varignon)[61] の装置である。これは，円形の枠が支柱によって水平に支えられ，その枠の縁の3つの場所に枠の内部の1点で結ばれた3本の糸を引く力が与えられるような滑車がとりつけられてある装置である。各滑車の位置を点 P_1，P_2，P_3 と同等の位置に固定し，各滑車の上にかけられた糸の先にそれぞれ，M_1，M_2，M_3 に相当する重りがとりつけられると，その重りの力によって3本の糸の結び目が，その重りの力の働きによって，ある位置に静止する。その静止した位置が，この装置で得られた人口中心点の位置である。

なお，ウェーバーの書物の付録 (Mathematischer Anhang) として書かれたピックの論文の第1節 輸送費の極小点 (Der Ort der geringsten Transportkosten) によれば，1901年，マッハ (Mach) がこのヴァリニョンの装置自体の説明をおこなっている[62]。また，クーンとキーニーによれば，最近では，ポリア (G. Polya) やミール (W. Miehl) によってこの装置の説明がおこなわれている[63]。

ウェーバーの問題は上記のように定式化され，その解法も明示されたが，このウェーバーの問題は，アイザード (Walter Isard) によって，拡張された。彼の拡張によれば，この問題は，式 (6.6) のかわりに，より一般的に，

$$C=d_1t_1M_1+d_2t_2M_2+d_3t_3M_3 \qquad (6.8)$$

という形で書かれる。ただし，t_1，t_2，t_3 は，点 P から点 P_1，P_2，P_3 へ原料や製品を輸送するための運賃率 (transport rate) ——1単位重量の原料や製品を1単位距離輸送するための費用である[64]。この拡張は，ウェーバーの問題をより現実的な形で定式化したものであるといえる。しかも，この問題も，適当な変形によって，ウェーバーの提唱した方法を用いて C を最小にする地点 P を見いだすことができる。すなわち，ウェーバーの問題の場合には C を最小にするかわりに，$K=C/t$ として，この K を最小にする問題に変形したが，ここでは，$t_iM_i(i=1,2,3)$ を $\mu_i(i=1,2,3)$ とするのである。このとき，

$$C=d_1\mu_1+d_2\mu_2+d_3\mu_3 \qquad (6.9)$$

という形が得られるが，この C を最小にさせるためには，図2におけるすべての M_i を μ_i に置きかえれば，図2によって P を求めた方法とまったく同様の方法によって地点 P を見いだすことができる。

(4) ラウンハルトの研究

ラウンハルト (W. Launhart) も，ウェーバーの問題を研究した人の1人であった。彼は，直接，ウェーバーの研究について考察をおこな

59) Alfred Weber : op. cit., S. 227.
鈴木啓祐訳編：前掲書，97頁.
P. Flaskämper : op. cit., S. 483.

60) 江沢譲爾監修，日本産業構造研究所訳：前掲書，262-273頁.
Alfred Weber : op. cit., S. 225-235.
鈴木啓祐訳編：前掲書，98頁.

61) 江沢譲爾：『立地論序説』，東京，時潮社，昭和30年（第1版），105頁.
西岡久雄：『経済地理分析』，東京，大明堂，昭和51年，197-198頁.

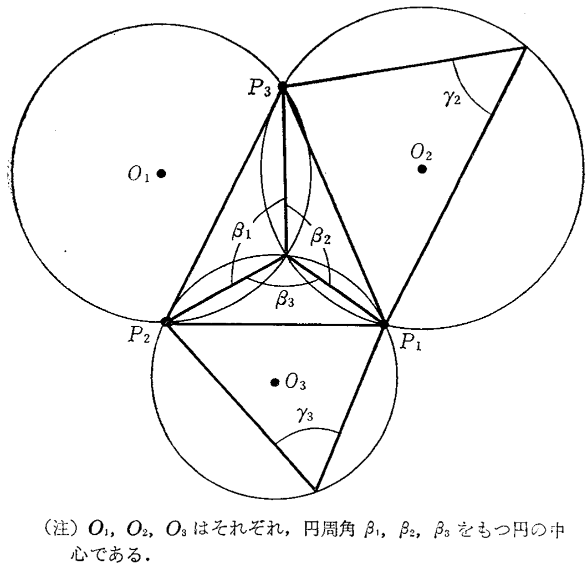
62) Alfred Weber : op. cit., S. 226.
Mach : *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, 4 Aufl., Brochhaus, 1901, S. 50.

63) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，120頁，133頁.
G. Polya : *Introduction and Analogy in Mathematics*, Princeton, 1954.
W. Miehl : "Link-length Minimization in Networs," *Operations Research*, 6, 1958, pp. 232-243.

64) Walter Isard : *Location and Space Economy*, The Technology Press of Massachusetts Institute of Technology and John Wiley, New York, 1956, pp. 222-230.
鈴木啓祐：「物流経済の計測」，林周二，中西睦編：前掲書，302頁.

い，さらに彼独自の方法——数学的方法——を用いて，この問題を解いた。

まず，彼は，ウェーバーが，図2(C)に示された角 β_1, β_2, β_3 をもつ3本の直線を図2(A)の立地三角形の中に書き込む場合，円周角の性質——円周角の定理 (Peripheriewinkel-Satz) によれば，円の弦の両端と円周上の任意の1点とを結んでできる三角形の円周上の点の内角は，その点の位置に無関係に一定であるという性質がある——を用いてえがくことを提案しているが[65]，この円に対して，「立地円」という名称を与えた[66]。実際に，円周角の定理を用いて P 点を求める方法を示すと，まず，図3に示されるように，直線 P_2P_3 の両端 P_2, P_3 から点 P_1 の反対側に，円周角 γ_1 をもつ三角形を書きその三角形に接する円を書く。このとき，直線 P_2P_3 を底辺として作られる点 P_1 の側にある「円に内接する三角形」のもつ円周角は β_1 に等しくなる。ついで，同様に，点 P_1, P_3 を通る円周角 γ_2 と β_2 とをもつ円と，P_1, P_2 を通る円周角 γ_3, β_3 をもつ円を書くのである。これら3個の円を書くと，三角形 $P_1P_2P_3$ の内部に3個の円の円周の交点が得られる。この交点のもつ3個の円周角は，いうまでもなく β_1, β_2, β_3 であり，この交点が求めようとしている点となる



(注) O_1, O_2, O_3 はそれぞれ，円周角 β_1, β_2, β_3 をもつ円の中心である。

図3 立地円による点 P の求め方

65) Alfred Weber : op. cit., S. 228.

66) 西岡久雄：前掲書，198頁.

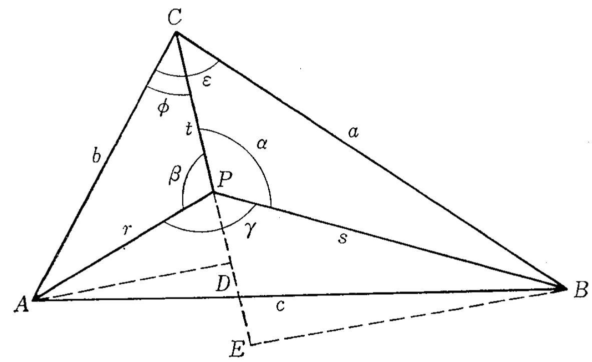


図4 ラウンハルトの考察した人口配置と人口中心点

(実際には，これら3個の円のうち2個を書けば，十分である。この2個の円の円周の交点が点 P となる)。このようにして，点 P が決定されるのである。

ラウンハルトは，こうしたウェーバーの研究の考察の他に，彼独自の点を求める2種類の方法を研究した。

彼は，1882年に，„Die Bestimmung des zweckmäßigsten Standorts einer gewerblichen Anlage“ という論文を書き，この中でその2つの方法を論じた。その第1の方法は，数学的解法である[67]。

ラウンハルトは，図4に示されるような3地点 A, B, C, に，それぞれ，(A), (B), (C) という人口が存在し，この人口が1点 P に集まるとき，その全移動距離 S，すなわち，

$$S=(A)r+(B)s+(C)t \qquad (6.10)$$

で与えられる S を最小にする点 P を見いだそうとした。ただし，r, s, t はそれぞれ，地点 P から地点 A, B, C までの距離である。この式を r, s および t を動かして最小にさせることができる（ただし，このうち独立変数は，r, s, t のうちのいずれか2変数である）が，ラウンハルトは，この式を，「拡張されたピタゴラスの

67) W. Launhardt : „Die Bestimmung des zweckmäßigsten Standorts einer gewerblichen Anlage,“ *Zschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure,* Bd. XXV, 1, H. 3, 1882, S. 106.
Flaskämper : op. cit., S. 478-481.
鈴木啓祐訳編：前掲書，100頁.
江沢譲爾：『立地論序説』，東京，時潮社，昭和30年，176-177頁.

定理 (erweiterten Pythagoräsichen Lehrsatz) ——これは，第2余弦法則 (second cosine rule) ともいわれている——を用いて，

$$S=(C)t+(B)\sqrt{t^2+b^2-2at\cos\phi}+(C)\sqrt{t^2+a^2-2bt\cos(\varepsilon-\phi)} \quad (6.11)$$

という形に変形し，この関数を r および ϕ に関して微分（偏微分）し，そこで得られた結果を0とさせることによって，Pの位置を求めた。ただし，ε とは点Aの内角であり，ϕは，直線 PA および AB によって作られる角である。偏微分をおこなう場合には，まず，

$$t^2+a^2-2at\cos\phi=u \quad (6.12.1)$$

$$t^2+b^2-2bt\cos(\varepsilon-\phi)=v \quad (6.12.2)$$

と置く。このようにしてから式 (6.11) を t に関して微分すれば，

$$\frac{\partial S}{\partial t}=(C)+\frac{d(B)\sqrt{u}}{du}\frac{du}{dt}+\frac{d(A)}{dv}\frac{dv}{dt} \quad (6.13)$$

が得られる。したがって，

$$\frac{\partial S}{\partial t}=(C)+(B)\frac{t-a\cos\phi}{\sqrt{t^2-a^2-2at\cos\phi}}+(A)\frac{t-b\cos(\varepsilon-\phi)}{\sqrt{t^2-a^2-2bt\cos(\varepsilon-\phi)}} \quad (6.14.1)$$

となる。同様に，ϕ に関して微分すれば，

$$\frac{\partial S}{\partial\phi}=(B)\frac{at\sin\phi}{\sqrt{t^2+a^2-2at\cos\phi}}-(A)\frac{bt\sin(\varepsilon-\phi)}{\sqrt{t^2+b^2-2bt\cos(\varepsilon-\phi)}} \quad (6.14.2)$$

となる。これらの結果を0と置き t と ϕ を求めるのである。しかし，これらの式は，きわめて複雑である。したがって，ここで，さらに，これらの式を変形することにする。その変形のためには，地点Pを通る直線CPを延長し，地点AおよびBからこの直線に鉛直線を引く，この直線を図4に示したように，BE, AD としたとき，これらの直線の長さ $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ は，および，直線 PE, PD の長さ，$\overline{PE}$, $\overline{PD}$ は，それぞれ

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{PE}=a\cos\phi-t & \overline{PD}=b\cos(\varepsilon-\phi)-t\\ \overline{EB}=a\sin\phi & \overline{AD}=b\sin(\varepsilon-\phi)\end{array}\right\} \quad (6.15)$$

となる。これらの関係を用いて，式 (6.14.1), (6.14.2) を変形し，これらの式の値を0と置けば，

$$(C)-(B)\frac{\overline{PE}}{s}-(A)\frac{\overline{PD}}{r}=0 \quad (6.16.1)$$

$$(B)\frac{\overline{EB}}{s}-(A)\frac{\overline{AD}}{r}=0 \quad (6.16.2)$$

という関係が得られる。これらの式は，$\angle CPB=\alpha$, $\angle CPA=\beta$, $\angle APB=\gamma$ と置くことによって，さらに簡単にすることができる。実際，式 (6.16.1), (6.16.2) は，

$$(C)+(B)\cos\alpha+(A)\cos\beta=0 \quad (6.17.1)$$

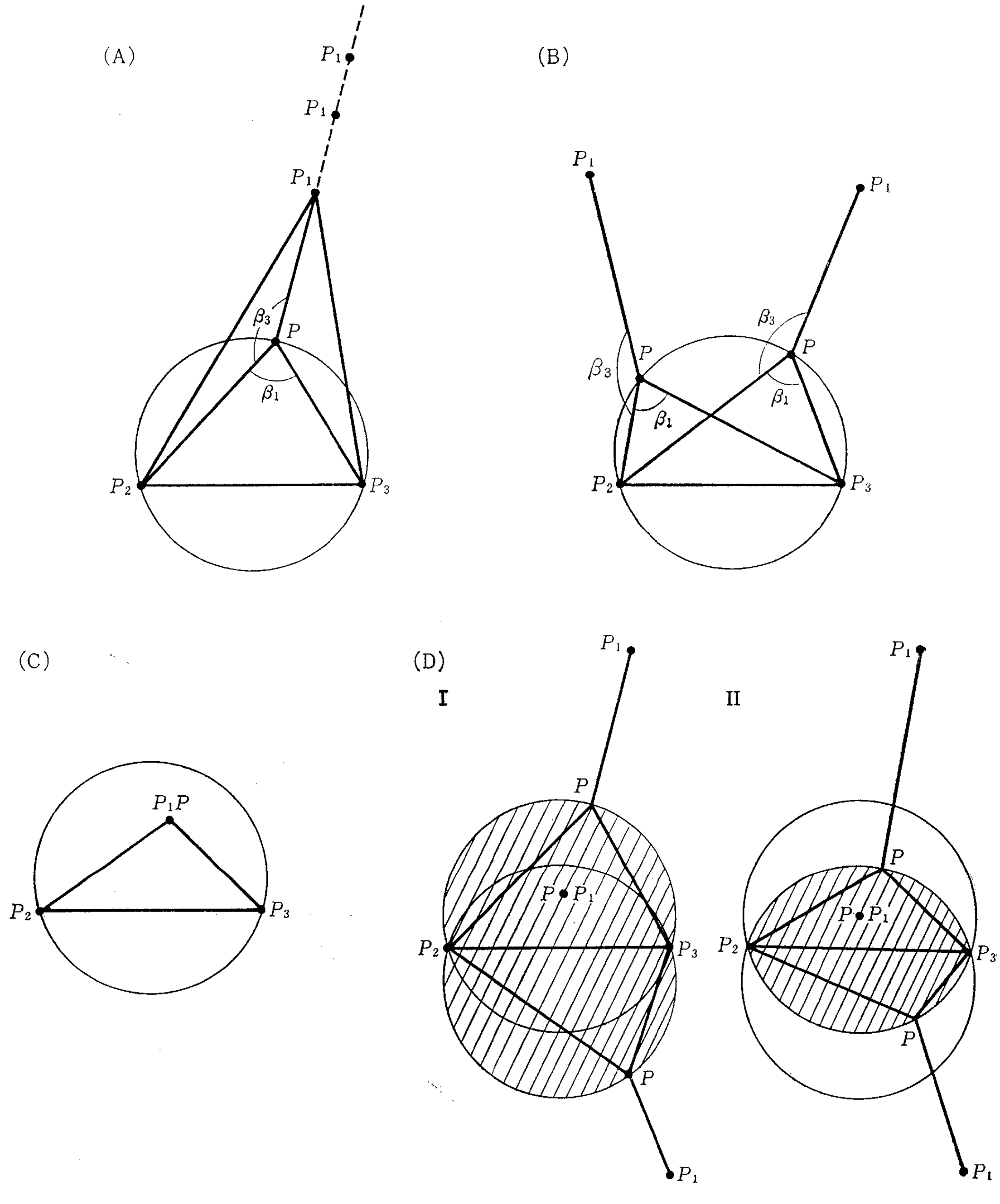
$$(B)\sin\alpha-(A)\sin\beta=0 \quad (6.17.2)$$

となる。これらの式から角α，およびβが知られ，したがって，角γも知られる ($\gamma=360°-(\alpha+\beta)$ である)[68]。

ラウンハルトの提唱した第2の独自の方法は，「極の原理 (pole principle)」による方法である[69]。クーンとキーニーによれば，これは，1885年，*Mathematische Begründung der Volkswirtscaftslehre* という著書の中でも論じたものである[70]。また，この方法は，その後，パランダー (T. Palander) によっても論じられた[71]。

この方法は，きわめて巧妙な幾何学的方法であり，西岡も指摘するように，ウェーバーの重量三角形の方法の拡張とみなし得る。この方法では，まず，輸送費用最小点（人口中心点）P について，つぎの3つの性質のあることに注目する。

68) 鈴木啓祐訳編：前掲書，90-93頁.
69) 西岡久雄：前掲書，201-203頁.
70) W. Launhardt : *Mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre*, Leipzig, 1885.
H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，120頁，133頁.
71) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，120頁，133頁.
T. Palander : *Beiträge zur Standortstheorie*, Uppsala, 1935.



（注） 円周角 β_1 が鋭角のときは，Pの出現範囲は（D）のⅠのようになるが，β_1 が鈍角のときは，（D）のⅡのようになる．

図５　極の原理に用いられる地点Pの性質

ｉ）地点 P_1，P_2，P_3 の原料または製品の重みがある一定の M_1，M_2，M_3 であるかぎり，地点P_1が直線PP_1の延長上いずれの場所にあっても（ただし，P_1は，地点P_2，P_3，Pを通る立地円の外側にあると仮定する）地点Pは動かない（図５(A)）。

ⅱ）地点 P_1 が立地円の外側のいずれの場所にあっても（ただし，P_1は，直線P_2P_3を延長して得られる直線よりも点Pの側にあると仮定する），地点 P は，立地円の円周上にある（図５(B)）。

ⅲ）地点 P_1 が立地円の内部にあるときは，地点Pは，地点P_1の位置にある（図５(C)）。

性質ｉ），ⅱ）は立地三角形の 性質から 明らかな性質といえる。これらの性質によれば，結局，M_1，M_2，M_3 が一定であるかぎり，また，地点 P_2，P_3 を固定しておくと，地点 P の存在範囲は図５(D)の２個の立地円の重なり合う斜線

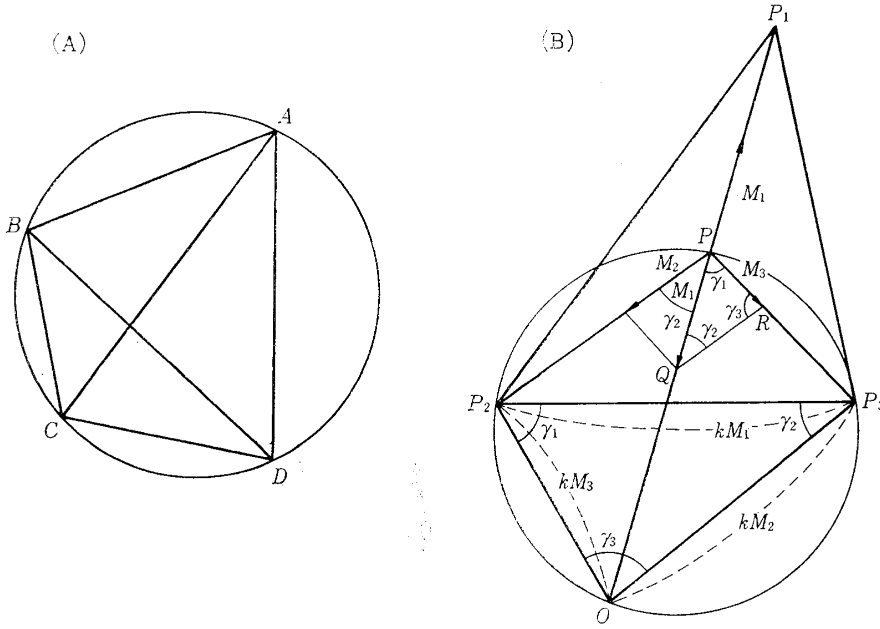


図 6　トレミーの定理と極の原理

部分となる。したがって，この範囲は，地点P_2，P_3 を通る円周角 β_1 の円を 2 個えがくことによって得られる。これらの 2 個の円がえがかれる理由は，点 P_1 が直線 P_2P_3 を延長して得られる直線の両側に現われる可能性があるからである。

この方法は，アイザードによっても紹介されている[72]。

この方法が，クーンとキーニーによって「極の原理による方法」と呼ばれている理由は，図 5 (A)の直線 P_1P を延長した線が立地円と交わる点Oをラウンハルトが極（pole）と名づけ，このOがPの存在範囲を示す地域の境界線上にあり，極とPの存在範囲とが密接な関係をもっているためであるといえよう。なお，極の原理とは，つぎのような原理であり，きわめて興味深いものである。

この原理は，西岡も指摘するように，トレミーの定理（Ptolemy's theorem）(あるいは，プトレマイオス（Ptolemaios）の定理）を基礎として得られたものである[73]。この定理によれば，図 6 (A)の円に内接する四辺形 $ABCD$ があるとき，この四辺形の各辺の長さ $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{AD}$，および対角線の長さ $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ の間に，

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD} \qquad (6.18)$$

という関係が成立する[74]。

図 6 (B)は，立地三角形 P_1，P_2，P_3，それがもつ輸送費最小の点 P，および重量 M_1，M_2，M_3 の大きさを示した図である。M_1，M_2，M_3 は，点Pから，重量三角形ならびに力の平行四辺形の辺を形成するように書かれている。直線 PP_1 を延長して立地円と交わる点をOとする。したがって，四辺形 OP_2PP_3 はこの重量三角形によってえがかれる立地円に内接している。また，三角形 OP_2P_3，OPP_3 は，この四辺形の中に含まれしかも直線 OP_3 はこれらの三角形の底辺であるから，円周角の性質により，

$$\angle OPP_3=\angle OP_2P_3=\gamma_1 \qquad (6.19)$$

となる。同様に，

$$\angle OPP_2=\angle OP_3P_2=\gamma_2 \qquad (6.20)$$

である。したがって，三角形 OP_2P_3 もまた，重量三角形であるといえる。ただし，各辺の長さは，立地三角形の内部に書かれた重量三角形の k 倍（$k>0$）となっている。前述のように，

72)　Walter Isard : op. cit., pp. 255-287.
73)　西岡久雄：前掲書，201-203頁。
74)　矢野健太郎，茂木勇，石原繁編：『数学小辞典』，東京，共立出版，昭和43年，422頁。
小堀憲：『数学史』，東京，朝倉書店，昭和51年（第11版），27頁.

四辺形 OP_2PP_3 は円に内接しているから，トレミーの定理により，

$$\overline{P_2P_3}\cdot\overline{OP}=\overline{OP_3}\cdot\overline{PP_2}+\overline{OP_2}\cdot\overline{PP_3} \quad (6.21)$$

が成立する。それゆえ，

$$kM_1\cdot\overline{OP}=kM_2\cdot\overline{PP_2}+kM_3\cdot\overline{PP_3} \quad (6.22)$$

が得られる。ここで，

$$\overline{OP}=\overline{OP_1}-\overline{PP_1} \quad (6.23)$$

という関係を用いて，式（6.22）を整理すれば，

$$M_1(\overline{OP_1}-\overline{PP_1})=M_2\overline{PP_2}+M_3\overline{PP_3} \quad (6.24)$$

すなわち，

$$M_1\overline{OP_1}=M_1\overline{OP_1}+M_2\overline{PP_2}+M_3\overline{PP_3} \quad (6.25)$$

という関係が得られる。この関係は，きわめて興味ある関係である。すなわち，これは，$\overline{OP_1}$ に M_1 を乗じた値は，総輸送費に等しいという関係を示している。いいかえれば，直線 $\overline{OP_1}$ は，総輸送費の $1/M_1$ を表現しているといえる。ラウンハルトは，O を極（pole）と呼び，この極と点 P_1 とを結ぶ直線の長さには，上記のような性質のあることを明らかにした[75]。この性質が極の原理である。

（5）フーバーの研究

パランダー（Tord Palander）は1935年に，またフーバー（E. M. Hoover）は1937年に，それぞれウェーバーの考案した等費用線[76]（Isodapane（イゾダパーネ），isodapane（アイソダペイン））—— isodapane はドイツ語の Isodapane を英語の形で書いた語である。また，フリードリッヒ（Carl J. Friedlich）によれば，この語は equal（等）の意味をもつ isos と expense（費用）の意味をもつ dapane とからなる語である[77]——を用いて輸送費最小の地点（あるいはここで問題とする人口中心点）を見いだすことを提唱した[78]。等費用線そのものを提唱したウェーバー自身は，これをむしろ他の目的に使用した。すなわち，生産者の最適立地が，労働費の地域的差異によって，輸送費最小の地点からどのように離れて行くかという点を示すために用いたのである[79]。

等費用線を示す等費用線図は，たとえば，M，C という2地点があり，生産者は地点 M から原料を購入し，地点 C へ，その原料から生産した製品を供給すると仮定した場合，図7(B)のようになるであろう。この図は，図7(A)を基礎としてえがかれたものである。すなわち，図7(A)では，横軸によって生産者の位置が，縦軸によって，製造1単位重量を生産するために必要な各種物資の輸送費がそれぞれ示されている。ただし，この図の点 M，および C は，それぞれ，原料供給地，および製品消費地の位置である。この図において，たとえば，地点 R に生産者が立地したとき，原料購入のために必要な輸送費は $\overline{mR}$，製品輸送のために必要なそれは $\overline{cR}$，そして，それらを合計した総輸送費は $\overline{tR}$ で示されている。図7(A)はこのような原則で書かれた図であり，したがって，点 m を通る線は，原料輸送費を，点 C を通る線は製品輸送費を，そして点 t を通る線は総輸送費を示している。図7(B)は地点 M，および C の周囲に図(A)を基として原料ならびに製品輸送費を同心円状に書き（図7(A)の各輸送費が地点 M，地点 C を中心にすべての方向に同様の増加傾向で増加して行くと仮定して同一の輸送費を示す地点が円によって示されている），さらにそれらの輸送費の和が等しくなる点を結んだ曲線（点線で示されたもの）を書き込んだものである。このとき得られた点線

75) 西岡久雄：前掲書，201–203頁．

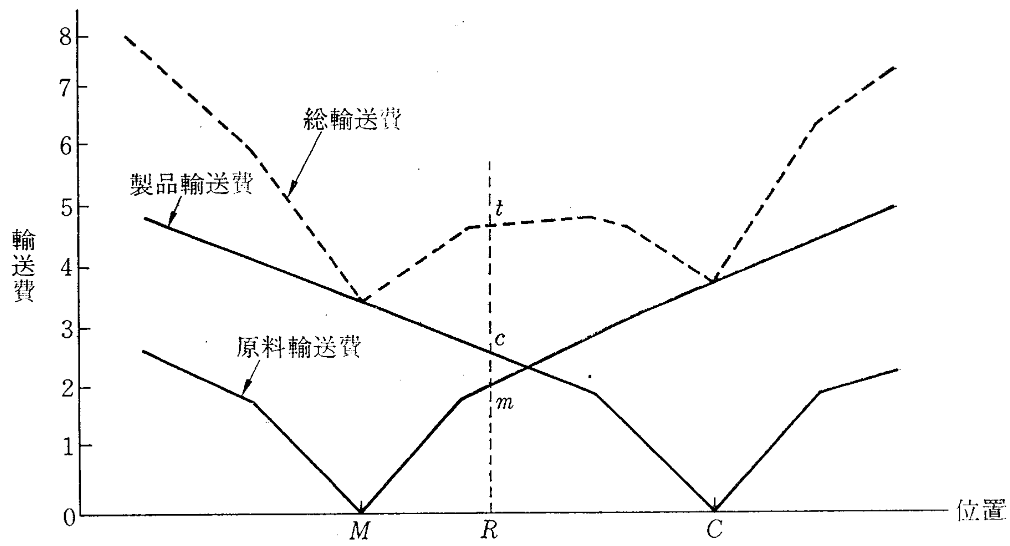
76) Alfred Weber : op. cit., S. 102.
江沢譲爾監訳，日本産業構造研究所訳：前掲書，118頁．

77) Carl J. Friedlich (translated) : *Alfred Weber, Theory of the Location of Industries*, Chicago, The University of Chicago Press, 1929.
鈴木啓祐訳編：前掲書，135頁．

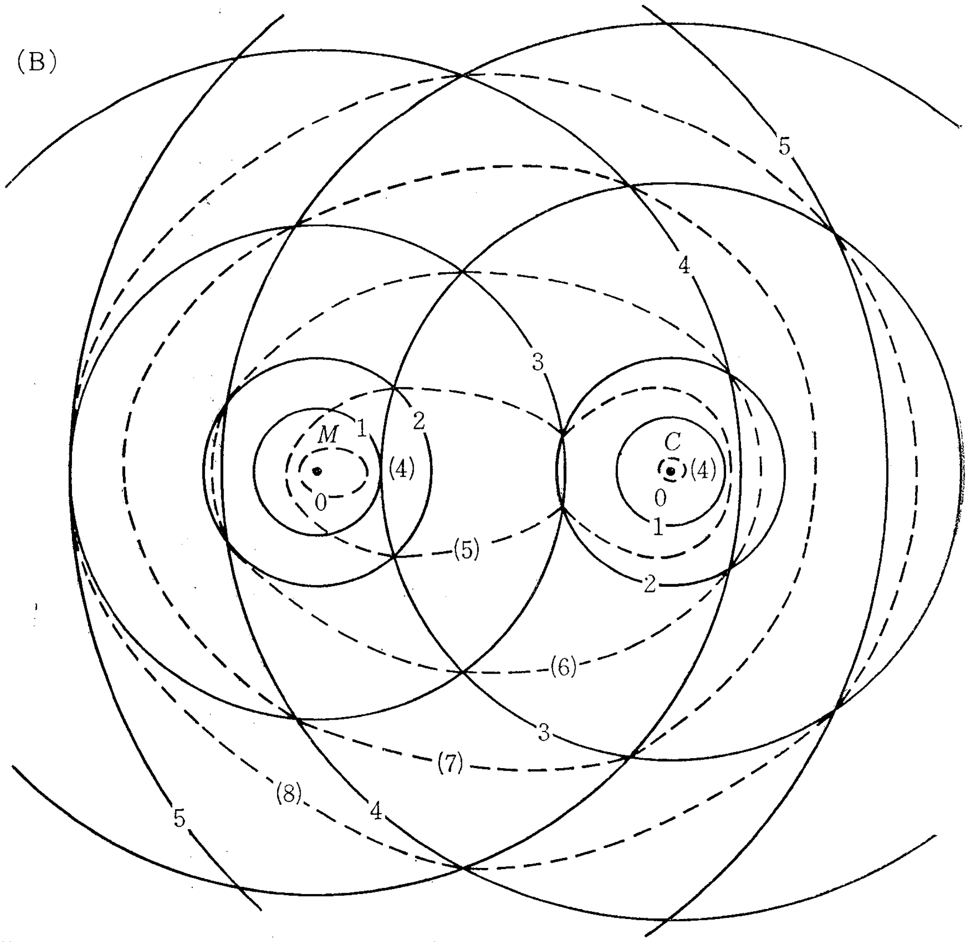
78) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，120頁．
国松久弥，安藤万寿男，西岡久雄，鈴木啓祐，奥野隆史：『増訂経済地理学』，東京，大明堂，昭和46年，81頁．
T. Palander : *Beiträge zur Stadortstheorie*, Uppsala, Almqvist and Wiksells, 1935.
E. M. Hoover : *Location Theory and the Shoe and Leather Industries*, Cambridge, Harvard University Press, London, 1937.

79) Alfred Weber : op. cit., S. 102.

(A)



(B)



(注) 数字は各種輸送費を示す．また（ ）内の数字が総輸送費を示す．

図 7 総輸送費とその等費用線

で書かれた等費用線が，ここでいう等費用線である。この図から，輸送費最小の地点は，点Mであることが知られる。

パランダーおよびフーバーは，等費用線を上述のように用いて輸送費最小の地点を見いだしたのである。

（6）クーンとキーニーの研究

「3つの地点 P_1, P_2, P_3 があり，各地点にそれぞれ人口1，1，1が存在し，その人々が，ある1点に集まるとき，その総移動距離を最小とする地点はどこか」という問題は，シュタイナーが研究したため，「シュタイナーの問題」と呼ばれ，これを拡張した，「3つの地点 P_1, P_2, P_3 があり，各地点にそれぞれ人口 w_1, w_2, w_3 が存在し，その人々がある1点に集まるとき，その総移動距離を最小とする地点はどこか」という問題は，ウェーバーによって提起され，研究されたため，「ウェーバーの問題」と呼ばれていることは，すでに（VI(2)およびVI(3)において）述べたが，クーンとキーニーは，これをさらに拡張して「一般化されたウェーバーの問題（generalized Weber problem）を解こうとした[80]。いま，これらの問題を，最小にさせる総移動距離Φによって示せば，以下のように示されるであろう。

シュタイナーの問題

$$\Phi=\sum d_i \qquad (i=1,2,3) \tag{6.26}$$

クーラントとロビンスの解いたシュタイナーの問題

$$\Phi=\sum d_i \qquad (i=1,2,3,4) \tag{6.27}$$

ウェーバーの問題

$$\Phi=\sum w_i d_i \qquad (i=1,2,3) \tag{6.28}$$

一般化されたウェーバーの問題

$$\Phi=\sum w_i d_i \qquad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{6.29}$$

ただし，d_i は集合地点から地点 P_i までの距離である。なお，前に（VI(2)で）述べたように，クーラントとロビンスが $i=1,2,3,4$ となるシュタイナーの問題を解いているので，ここでは，この問題も挙げておいた。

クーンとキーニーによれば，一般化されたウェーバーの問題を解くためには，式（5.15）と（5.16）が用いられなければならない。すなわち，ここで用いられた記号によれば，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\sum\frac{w_i}{d_i}(x_i-x)=0 \tag{6.30.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\sum\frac{w_i}{d_i}(y_i-y)=0 \tag{6.30.2}$$

という式（これは，式（6.29）の Φ を x と y に関して微分し，その結果を0としたものである）が用いられなければならない。ただし，x_i, y_i は地点 P_i の座標を X, Y 軸のそれ（x_i, y_i）で示したときの x_i および y_i, x, y は，人口中心点の位置を示す座標（x, y）の X 軸と Y 軸の値である。上式から，まず，

$$x\sum\frac{w_i}{d_i}=\sum\frac{w_i}{d_i}x_i \tag{6.31.1}$$

$$y\sum\frac{w_i}{d_i}=\sum\frac{w_i}{d_i}y_i \tag{6.31.2}$$

が得られる。したがって，

$$x=\left(\sum\frac{w_i}{d_i}\right)^{-1}\sum\frac{w_i}{d_i}x_i \tag{6.32.1}$$

$$y=\left(\sum\frac{w_i}{d_i}\right)^{-1}\sum\frac{w_i}{d_i}y_i \tag{6.32.2}$$

となる。しかし，x および y が知られていないので，d_i が計算できず，これらの式からはまったく x, y を得ることはできない。したがって彼等は，結果的に，式（6.30.1），（6.30.2）における

$$\sum\frac{w_i}{d_i}(x_i-x)=0 \tag{6.33.1}$$

$$\sum\frac{w_i}{d_i}(y_i-y)=0 \tag{6.33.2}$$

という関係を満足させるような x, y を求める方法を数学的に検討し，以下のような方法が用いられることを明らかにした（説明の内容が容易に理解されるように，クーンとキーニーの用いた記号とは多少異なった記号を用いることにする）。

手順1　人口重心を求め，そのX軸，Y軸上の位置を $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{y}^{(1)}$ とする。すなわち，

80) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
鈴木啓祐訳編：前掲書，115-135頁.

$$\bar{x}^{(1)}=\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \qquad (6.34.1)$$

$$\bar{y}^{(1)}=\frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} \qquad (6.34.2)$$

とする。この点を，人口中心点の位置の第１番目に得られる近似値であるとみなす。

手順２　$\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$ を用いて算出された新しい w_i の値 $w_i^{(1)}$ を用いて人口重心を見いだす。その位置を（$\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$）とすれば，

$$\bar{x}^{(2)}=\frac{\sum w_i^{(1)} x_i}{\sum w_i^{(1)}} \qquad (6.35.1)$$

$$\bar{y}^{(2)}=\frac{\sum w_i^{(1)} y_i}{\sum w_i^{(1)}} \qquad (6.35.2)$$

となる。ただし，

$$w_i^{(1)}=\frac{w_i}{d_i^{(1)}} \qquad (6.36)$$

であり，$d_i^{(1)}$ は，地点 P_i から地点（$x_i^{(1)}, y_i^{(1)}$）（人口重心の位置）までの距離である。すなわち，

$$d_i^{(1)}=\sqrt{(x_i-\bar{x}^{(1)})^2+(y_i-\bar{y}^{(1)})^2} \qquad (6.37)$$

手順３　式 (6.37) の $\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$ を $\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$ に置きかえて $d_i^{(2)}$ をつくり，式 (6.36) の $d_i^{(1)}$ を $d_i^{(2)}$ で置きかえて $w_i^{(2)}$ をつくり，これを式 (6.35.1)，(6.35.2) の $w_i^{(1)}$ に代入して $\bar{x}^{(3)}$，$\bar{y}^{(3)}$ をつくる。すなわち，

$$\bar{x}^{(3)}=\frac{\sum w_i^{(2)} x_i}{\sum w_i^{(2)}} \qquad (6.38.1)$$

$$\bar{y}^{(3)}=\frac{\sum w_i^{(2)} y_i}{\sum w_i^{(2)}} \qquad (6.38.2)$$

$$w_i^{(2)}=\frac{w_i}{d_i^{(2)}} \qquad (6.39)$$

$$d_i^{(2)}=\sqrt{(x_i-\bar{x}^{(2)})^2+(y_i-\bar{y}^{(2)})^2} \qquad (6.40)$$

によって，$\bar{x}^{(3)}$，$\bar{y}^{(3)}$ を得る。

手順４　手順３と同様の計算を繰り返しおこない，$\bar{x}^{(k)}$，$\bar{y}^{(k)}$ が $\bar{x}^{(k-1)}$，$\bar{y}^{(k-1)}$ とほとんど変らなくなったとき，計算を止める。ただし，

$$\bar{x}^{(k)}=\frac{\sum w_i^{(k-1)} x_i}{\sum w_i^{(k-1)}} \qquad (6.41.1)$$

$$\bar{y}^{(k)}=\frac{\sum w_i^{(k-1)} y_i}{\sum w_i^{(k-1)}} \qquad (6.41.2)$$

$$w_i^{(k)}=\frac{w_i}{d_i^{(k-1)}} \qquad (6.42)$$

$$d_i^{(k-1)}=\sqrt{(x_i-\bar{x}^{(k-1)})^2+(y_i-\bar{y}^{(k-1)})^2} \qquad (6.43)$$

である[81]。この種の反復計算がある値に収束して行くことは，クーンとキーニーによれば，カリー (H. B. Curry) によって証明されている[82]。また，このような方法で人口中心点を求めようとした試みはすでにワイスフェルト (E. Weiszfelt)[83]によってなされているが，彼の収束条件に関する証明には誤りがあった[84]。したがって，この方法を精密に数学的に定式化した人々は，クーンとキーニーであるといえる。

いま，この方法を用いて，実際に簡単な問題を解いてみよう。問題は，「３地点 P_1，P_2，P_3 が (4, 10)，(0, 0)，(10, 0) にあり，それぞれの地点に，８，６，７人の人々が居住しているとき，この人口分布の人口中心点はどこか」というものである。これを解くことによって，クーンおよびキーニーの手法をより明確に説明することができるであろう。

まず，手順１の $\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$ を求めるために，表１(A)および(B)の欄(2)，(3)に x_i，y_i，w_i を記入し，欄(4)にそれらの積を書き込む。そして，欄(3)と(4)の合計欄に，これらの欄の合計値を記入し，欄(4)の合計値を欄(3)の合計値で除せば，$\bar{x}^{(1)}$ または $\bar{y}^{(1)}$ が得られる。

ついで，手順２の式 (6.37) の $(x_i-\bar{x}^{(1)})^2$ および $(y_i-\bar{y}^{(1)})^2$ を算出する。これらが，表

81) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.
江沢譲爾：「立地の部分均衡分析」，江沢譲爾，高橋潤二郎，西岡久雄：『経済立地論の新展開』，東京，勁草書房，1973年，53-54頁.
西岡久雄：『経済地理分析』，東京，大明堂，昭和51年，203-206頁.
鈴木啓祐訳編：前掲書，115-135頁.

82) H. B. Curry : "The Method of Steepest Desent for Non-Linear Minimization Problems," *Quarterly of Applied Mathematics*, 2, 1944, pp. 258-260.

83) E. Weiszfeld : "Sur le Point pour Lequel la Somme des Distances de n Points donnés est Minimum," *The Tôhoku Mathematical Journal* (東北数学雑誌), Sendai (仙台), The Tôhoku Imperial University (東北帝国大学), Vol. 43, 1937, pp. 355-386.

84) H. W. Kuhn and R. E. Kuenne : op. cit.

1(A)および(B)の欄(5)の値である。これは，欄(2)の値と $\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$ とを用いて算出されている。

表1 クーンおよびキーニーの方法による人口中心点の求め方

(A) $\bar{x}$ の座標の算出表

地点 (1)	x_i (2)	w_i (3)	w_ix_i (4)	$d_i^{(1)}$の要素 (5)	$\frac{w_i}{d_i^{(1)}}=w_i^{(1)}$ (6)
P_1	4	8	32	$(4-4.86)^2=0.7396$	$\frac{8}{6.25}=1.28$
P_2	0	6	0	$(0-4.86)^2=23.6196$	$\frac{6}{6.18}=0.97$
P_3	10	7	70	$(10-4.86)^2=26.4196$	$\frac{7}{6.40}=1.09$
	合計	21	102		
		$\bar{x}^{(1)}$	4.86		

$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}x_i$ (4′)	$d_i^{(2)}$の要素 (5′)	$\frac{w_i}{d_i^{(2)}}=w_i^{(2)}$ (6′)
1.28	5.12	$(4-4.80)^2=0.6400$	$\frac{8}{6.22}=1.29$
0.97	0.00	$(0-4.80)^2=23.0400$	$\frac{6}{6.14}=0.98$
1.09	10.90	$(10-4.80)^2=27.0400$	$\frac{7}{6.46}=1.08$
合計 3.34	16.02		
$\bar{x}^{(2)}$	4.80		

$w_i^{(2)}$ (3″)	$w_i^{(2)}x_i$ (4″)
1.29	5.16
0.98	0.00
1.08	10.80
合計 3.35	15.96
$\bar{x}^{(3)}$	4.76

(B) $\bar{y}$ の座標の算出表

地点 (1)	y_i (2)	w_i (3)	w_ix_i (4)	$d_i^{(1)}$の要素 (5)	$\frac{w_i}{d_i^{(1)}}=w_i^{(1)}$ (6)
A	10	8	80	$(10-3.81)^2=38.3161$	$\frac{8}{6.25}=1.28$
B	0	6	0	$(0-3.81)^2=14.5161$	$\frac{6}{6.18}=0.97$
C	0	7	0	$(0-3.81)^2=14.5161$	$\frac{7}{6.40}=1.09$
	合計	21	80		
		$\bar{y}^{(1)}$	3.81		

$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}y_i$ (4′)	$d_i^{(2)}$の要素 (5′)	$\frac{w_i}{d_i^{(2)}}=w_i^{(2)}$ (6′)
1.28	12.80	$(10-3.83)^2=38.0689$	$\frac{8}{6.22}=1.29$
0.97	0.00	$(0-3.83)^2=14.6689$	$\frac{6}{6.14}=0.98$
1.09	0.00	$(0-3.83)^2=14.6689$	$\frac{7}{6.46}=1.08$
合計 3.34	12.80		
$\bar{y}^{(2)}$	3.83		

$w_i^{(2)}$ (3″)	$w_i^{(2)}y_i$
1.29	12.90
0.98	0.00
1.08	0.00
合計 3.35	12.90
$\bar{y}^{(3)}$	3.85

(C) d_i の算出表

地点 (1)	(x の $d_i^{(1)}$ の要素$+y$ の $d_i^{(1)}$ の要素$)^{\frac{1}{2}}=d_i^{(1)}$ (2)	(x の $d_i^{(2)}$ の要素$+y$ の $d_i^{(2)}$ の要素$)^{\frac{1}{2}}=d_i^{(2)}$ (2′)
P_1	$(0.7396+38.3161)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{39.0557}=6.25$	$(0.6400+38.0689)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{38.7089}=6.22$
P_2	$(23.6196+14.5161)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{38.1357}=6.18$	$(23.0400+14.6689)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{37.7089}=6.14$
P_3	$(26.4196+14.5161)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{40.9357}=6.40$	$(27.0400+14.6689)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{41.7089}=6.46$

この値が算出されたならば，式 (6.37) の値を得るために表1(C)の欄(2)に，この値を書き込み，$d_i^{(1)}$を求める。

第3に，この $d_i^{(1)}$ を表1(A)および(B)の欄(6)に記入し，この表の欄(3)の値を用いて $w_i^{(1)}$ を算出する。

これで，$\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$ を求める用意が完了する。$w_i^{(1)}$が得られたら，これを表1(A)および(B)の欄

(3′)に記入し，これまでにおこなった計算方式とまったく同様の計算方式に従って，$\bar{x}^{(2)}$, $\bar{y}^{(2)}$, $w_i^{(2)}$を求める。そして，順次，同様の方法で$\bar{x}^{(k)}$, $\bar{y}^{(k)}$, $w_i^{(k)}$ ($k=3, 4, \cdots$) を求めて行くのである。

ここでは$x^{(3)}$, $y^{(3)}$まで求めたが，これまでの近似的人口中心点$P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$を図上に示すと，図8のようになる。人口中心点に近づくに従って，近似的人口中心点の動きが小さくなって行く。この動きが十分に小さくなったとき，計算を止めるのである。ここで$P^{(1)}$から$P^{(2)}$, $P^{(2)}$から$P^{(3)}$までの距離$d_{1,2}$, $d_{2,3}$を測定してみると，

$$d_{1,2}=0.06 \qquad (6.44.1)$$

$$d_{2,3}=0.03 \qquad (6.44.2)$$

となった。ここでも，すでに近似的人口中心点の動きが減少する傾向が見られる。

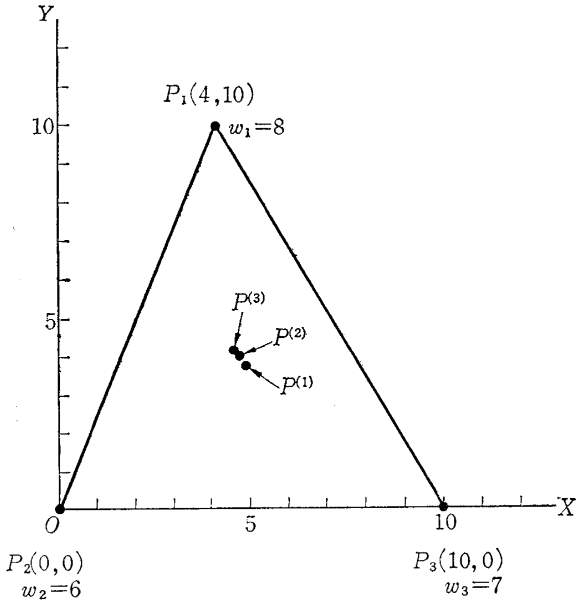


図8　人口中心点の計算結果

（7）セイモーアの研究

西岡によれば[85]，セイモーア (David R. Seymour) は，コンピューターに適した人口中心点の算出法を考案した[86]。その方法では，まず，点の分布を示す図の上に縦，横の方向に，互いに同様の平行線を引き，その図をその平行線でできる方格網によっておおう。この場合，縦，横の各平行線の間隔はそれぞれ一定でなければならないが，縦線の平行線の間隔と横線のそれとは互いに異なっていてよい。

ついで，これらの平行線の交点（第k番目のその交点の位置を$x_0^{(k)}$, $y_0^{(k)}$とする）から各点までの距離の和$S^{(k)}$，すなわち，

$$S^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_0^{(k)})^2+(y_i-y_0^{(k)})^2} \qquad (6.45)$$

を算出する。ただし，x_i, y_iは第i番目 ($i=1, 2, \cdots, n$) の点の座標のX軸，Y軸上の位置であり，点はn個とする（ここでは，人が点とみなされている）。

第3に，$S^{(k)}$が最小となる交点 ($x_0^{(k)}$, $y_0^{(k)}$) を求め，この交点の周囲を，平行線の間隔を縮小した，最初の方格網と同型の方格網でおおい，この方格網の各交点において，式 (6.45) と同様の値を見いだす この場合，($x_0^{(k)}$, $y_0^{(k)}$) はやはり各交点（第2の方格網の各交点）の位置を示す。そして，ふたたび最小の$S^{(k)}$を与える交点を見いだす。その後は，これまでと同様に，さらに小さな方格網を反復的に用いて，各点からの距離が最小となる点を見いだすのである。

（8）シュテンペルの研究

江沢は，最近における東ドイツにおける立地問題の研究を紹介しながら，シュテンペルの研究につき詳細に論じた[87]。

彼は，まず，適当な地点をえらんでその地点へ移動するための距離の総和を求め，その総和の等値線（距離を移動費用とみなして，シュテンペルは，これを等費用線と呼んでいる）をえがく。ついで，任意の地点P_0を起点として，経線（または，緯線）に沿って費用極小の点まで移動する。その点が得られたら緯線（または，

85) 西岡久雄：前掲書，205-206頁.

86) David R. Seymour: "IBM 7090 Program for Location Bivariate Means and Bivariate Medians," *Technical Report* 16, Department of Geography, Northwestern University, 1965.
　西岡久雄：前掲書，205-206頁.

87) 江沢譲爾：前掲論文 (1973年)，95-98頁.
　D. Stempell: „Standortbestimmung mit der Methode der steilsten Antstiegs," *Mathematische Methoden zur Standortbestimmung*, Berlin, 1967.

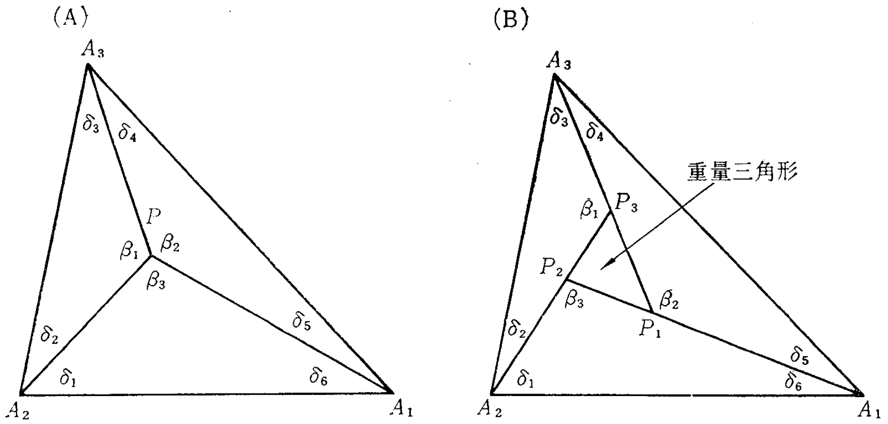


図 9　テリエの解法に用いられる三角形

経線）に沿って費用極小の点まで移動する。そして，この作業を反復して総移動距離（費用）最小の地点を見いだすのである。彼は，この方法を「単一ファクター法」と名づけた。

しかし，この方法のみでは，必ずしも移動費用最小の地点に到達することができないので，その場合には，ボックス（G. E. P. Box），ウイルソン（K. B. Wilson）等の考案した「最急傾斜法」が用いられる。この方法では，任意の地点を出発点とし，その近傍に3地点をとり，この3点の総移動距離（費用）Cを見いだし，

$$C=a+bx+cy \qquad (6.46)$$

というCの平面を求める。ただし，x，yは地点の位置を示す座標のX軸およびY軸の値，a，b，cはパラメーターである。第2にこの平面の傾斜の最も強い方向にある点の近傍に同様に3地点をとる。さらに同様の平面を用いて第3の3地点をとる。このようなことを繰り返して行き，移動費用最小点に近づいたときは，3点のかわりに6点をえらび，その点を通る費用Cの2次曲面，すなわち，

$$C=a_1+ax_2+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2 \qquad (6.47)$$

という曲面を見いだし，Cの極小点を見いだし，この地点をCの最小点とみなすのである。ただし，$a_i\,(i=1,2,\cdots,6)$はパラメーターである。

(9) テリエの方法

西岡によれば，テリエ(Luc-Normand Tellier)は1972年，ウェーバーの問題ならびに一般化されたウェーバーの問題を重量三角形の性質を用いて解いた[89]。

テリエは，まず，立地三角形A_1，A_2，A_3の各頂点と立地点（人口の問題の場合には人々の集合する地点）Pとを結び，そのときできる3個の三角形A_1PA_2，A_2PA_3，A_3PA_1の内角を，それぞれ，

δ_6，β_3，δ_1

δ_2，β_1，δ_3

δ_4，β_2，δ_5

とした（図9(A)）。この場合，各頂点A_1，A_2，A_3には，重量w_1，w_2，w_3があり，したがって，β_1，β_2，β_3は，重量三角形におけるそれに等しくなければならない。各角の定義により，

$$\angle\delta_1+\angle\delta_2=\angle A_2 \qquad (6.48.1)$$
$$\angle\delta_3+\angle\delta_4=\angle A_3 \qquad (6.48.2)$$
$$\angle\delta_5+\angle\delta_6=\angle A_1 \qquad (6.48.3)$$
$$\angle\delta_1+\angle\delta_6=180^\circ-\beta_3 \qquad (6.48.4)$$
$$\angle\delta_4+\angle\delta_5=180^\circ-\beta_2 \qquad (6.48.5)$$
$$\angle\delta_2+\angle\delta_3=180^\circ-\beta_1 \qquad (6.48.6)$$
$$\cos\beta_1=\frac{-(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2-\alpha_1{}^2)}{2\alpha_2\alpha_3} \qquad (6.49.1)$$
$$\cos\beta_2=\frac{-(\alpha_1{}^2+\alpha_3{}^2-\alpha_2{}^2)}{2\alpha_1\alpha_3} \qquad (6.49.2)$$
$$\cos\beta_3=\frac{-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=\alpha_3{}^2)}{2\alpha_1\alpha_2} \qquad (6.49.3)$$

89) 西岡久雄：前掲書，198-201頁.
Luc-Normand Tellier: "The Weber Problem: Solution and Interpretation," *Geographical Analysis*, 4, 3, 1972.

となる（ここで，δ_i（$i=1, 2, \cdots, 6$）で示された角は，西岡の説明の中では i となっている)。ただし，α_1，α_2，α_3 は重量三角形の辺の長さである。また，式 (6.49.1) ～ (6.49.3) は，三角関数の余弦法則（より厳密には第2余弦法則 (second cosine rule))，すなわち，三角形 ABC の頂点 A, B, C の対辺をそれぞれ，a, b, c とすれば，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A \qquad (6.50.1)$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\angle B \qquad (6.50.2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C \qquad (6.50.3)$$

という関係があるという法則[90]から得られたものである。

ここで，求める未知数は，δ_i（$i=1,2,\cdots,6$）の6個であるが，三角形の性質上，

$$\angle\delta_1+\angle\delta_2+\cdots+\angle\delta_6=180° \qquad (6.51)$$

という関係があり，未知数は，5個となり，また，δ_i に関する式は，2個減少し4個となる。実際，たとえば，式 (6.48.1) は，式 (6.51) から，

$$180°-(\angle\delta_3+\cdots+\angle\delta_6)=\angle A_2 \qquad (6.52)$$

と書ける。式 (6.48.2) と (6.48.3) とから，この式は，

$$180°-(\angle A_3+\angle A_1)=\angle A_2 \qquad (6.53)$$

すなわち，

$$\angle A_2=\angle A_2 \qquad (6.54)$$

となり，未知数を求めるためには役立たないものになる。同様に，式 (6.48.4) ～ (6.48.6) から1個の不要な式が現われる。したがって，5個の式を得るためには，もう1個の式を加えなければならない。その式は，

$$\frac{\overline{A_2A_3}\sin\angle\delta_3}{\sin\beta_1}=\frac{\overline{A_2A_1}\sin\angle\delta_6}{\sin\beta_3} \qquad (6.55)$$

という式である。この式は，正弦法則 (sine rule)[91]，すなわち，上述の一般三角形において，

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C} \qquad (6.56)$$

という法則を用いて得られる式（点 P_2 を P_3 に一致させ，式 (6.56) の等号で結ばれたはじめの2つの分数間の関係を用いて得られる）である。式 (6.55) がつけ加えられ得る根拠はつぎのように説明される。もし，式(6.48.1)～(6.48.6) のみが与えられているときには，図形的に示すと，重量三角形を $P_1P_2P_3$ とするとき図9(B)のような状態であっても，これらの δ_i は，上記の6式を満足してしまう。しかし，重量三角形 $P_1P_2P_3$ の各頂点は1点に集まらなければならない。そのときには，$A_2P_2=A_2P_3$ とならなければならない。このとき，A_2P_3 が式 (6.55) の左辺の値であり，A_2P_2 がその右辺の値である。したがって，式 (6.55) が成立しなければならない。

ここで，式 (6.55) を変形すると，

$$\frac{\sin\angle\delta_3}{\sin\angle\delta_6}=\frac{\overline{A_2A_1}\sin\beta_1}{\overline{A_2A_3}\sin\beta_3} \qquad (6.57)$$

が得られる。この右辺の値を k とすれば，

$$\frac{\sin\angle\delta_3}{\sin\angle\delta_6}=k \qquad (6.58)$$

となる。このことは，$\angle\delta_3$ および $\angle\delta_6$ はまだ不明であるが，これらの正弦の比は k（これは算出できる）であることを示している。テリエは，この k を手がかりとして，δ_i を解こうとした。すなわち，彼は，まず，

$$k'=\angle A_1-180°+\beta_2+\angle A_3 \qquad (6.59)$$

という値 k'（これは算出できる）を新たに導入する。この値は，

$$\begin{aligned} k'&=\angle A_1-(180°-\beta_2)+\angle A_3\\ &=(\angle\delta_5+\angle\delta_6)-(\angle\delta_4+\angle\delta_5)\\ &\quad+(\angle\delta_3+\angle\delta_4)\\ &=\angle\delta_6+\angle\delta_3 \end{aligned} \qquad (6.60)$$

である。したがって，いま，k と k' により

$$x=\frac{k\sin k'}{1+k\cos k'} \qquad (6.61)$$

で定義されるような x の値を求めると，

$$x=\frac{\dfrac{\sin\angle\delta_3}{\sin\angle\delta_6}\sin(\angle\delta_6+\angle\delta_3)}{1+\dfrac{\sin\angle\delta_3}{\sin\angle\delta_6}\cos(\angle\delta_6+\angle\delta_3)} \qquad (6.62)$$

が得られる。他方，一般に成立する

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad (6.63.1)$$

90) 矢野健太郎，茂木勇，石原繁編：前掲書，345頁.
91) 矢野健太郎，茂木勇，石原繁編：前掲書，284頁.

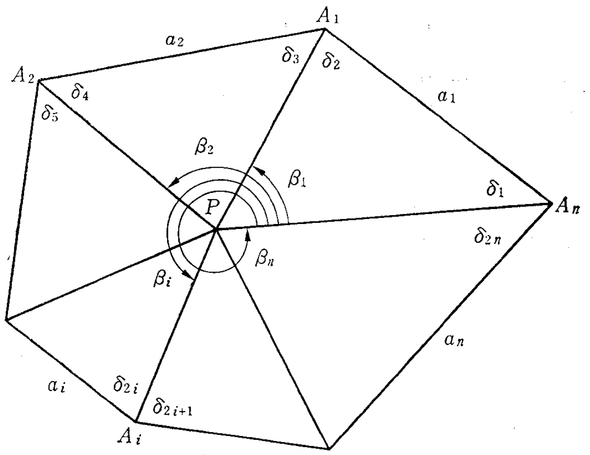


図10 テリエによる立地多角形

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \tag{6.63.2}$$

$$\cos^2 a=1-\sin^2 a \tag{6.63.3}$$

という関係（a, b は任意の角）を用いて，式(6.62) を整理すると，

$$x=\frac{\sin\angle\delta_3}{\cos\angle\delta_3}$$

$$=\tan\angle\delta_3 \tag{6.64}$$

となる。x の値は式（6.61）から知られるので式 (6.64) から $\angle\delta_3$ が得られる。この値が知られれば，式 (6.48.1) ～ (6.48.3) または，式 (6.48.4) ～ (6.48.6) を用いて $\angle\delta_i$ ($i=1,2,4,5,6$) を知ることができる。この角度 $\angle\delta_i$ により地点 P を決定することができる。

テリエは，さらに地点 A_i の数が3個以上の場合の地点P（総移動費用が最小となる点）を求める方法を提案している。地点 A_i が3個以上のときは，立地三角形に相当する図形は，図10のような多角形となり，これは立地多角形と呼ばれる[92)]。立地多角形においては，この多角形の形と無関係に P と A_n ならびに A_n とを結んで得られる直線でできる角 β_i を決定することはできない。しかし，まず少なくとも，β_i ($i=1,2,\cdots,n$) の間には，

$$\alpha_1\cos\beta_1+\cdots+\alpha_n\cos\beta_n=0 \tag{6.64.1}$$

$$\alpha_1\sin\beta_1+\cdots+\alpha_n\sin\beta_n=0 \tag{6.64.2}$$

という関係が成立する。ただし，α_i は A_i における重量である。一般に，α_1 の直線 PA_n の方向への力 m_i は，

$$m_i=\alpha_i\cos\beta_1 \tag{6.65.1}$$

α_1の直線PA_nに垂直な直線の方向への力 m_i' は，

$$m_i'=\alpha_i\sin\beta_i \tag{6.65.2}$$

で示される。地点Pでは，これらの力が均衡状態になければならないために，式 (6.64.1), (6.64.2) が成立している。ついで，式 (6.55) と同様の関係が成立しなければならない。すなわち，

$$\frac{a_i\sin\delta_{2i-1}}{\sin(\beta_i-\beta_{i-1})}=\frac{a_{i+1}\sin\delta_{2i+2}}{\sin(\beta_{i+1}-\beta_i)}$$

$$(i=1,\cdots,n\,;\,\beta_0=0) \tag{6.66}$$

が成立しなければならない。ただし，a_iは直線 $A_{i-1}A_i$ (a_1 は直線 A_nA_1) の長さである。そして，最後に，

$$\delta_{2i}+\delta_{2i+1}=\angle A_i\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.67.1}$$

$$\delta_{2i}+\delta_{2i-1}=180^\circ-(\beta_i-\beta_{i-1}) \tag{6.67.2}$$

$$(i=1,\cdots,n;\ \beta_0=0)$$

が成立する。ただし，立地多角形は，一般に，つねに凸多角形とはかぎらず，非凸多角形の場合もあるので，非凸多角形の場合を含めた式 (6.67.1), (6.67.2) の一般的な式は，

$$\sin(\delta_{2i}+\delta_{2i+1})=\sin\angle A_i \tag{6.67.1'}$$

$$\sin(\delta_{2i}+\delta_{2i-1})=\sin(\beta_i-\beta_{i-1}) \tag{6.67.2'}$$

となる。

ここで求める未知数は n 個の β_i と $2n$ 個の δ_i とからなり，全体で $3n$ 個存在する。他方，式（方程式）としては，式 (6.64.1), (6.64.2), n 個の式からなる式 (6.67.1) および (6.67.2)（あるいは，式 (6.67.1′) および (6.67.2′)）が存在するから，その数は全体で $3n+2$ 個となる。しかし，このうちの2個の式は，立地三角形のPのための方程式と同様に，余分なものとなる（立地三角形の場合には，式 (6.48.1) ～ (6.48.6) と 式 (6.51) および式 (6.55) とで8個の方程式が存在し，このうちの2個は，余分なものとなり，結果的に，6個の方程式から6個の未知数が得られたことになる）から，すべての δ_i を上記の方程式によって完全に得ることができる。

これがテリエの移動費用最小点を求める方法

92) 西岡久雄：前掲書，200頁.

であり，n 地点に分布する人口の人口中心点もまったく同様の方法（ただし，α_i を重量とみなすかわりに人口とみなす）で求めることができる。

(10) 各種方法の比較]

ここに挙げたように，人口中心点の求め方は多くの人々によって検討され，特に，最近では，立地多角形を前提とする一般化されたウェーバーの問題の精密な解法に関する研究が数多くおこなわれるようになった。いずれの方法も，それぞれその方法特有の特徴をもっている。実際，クーンとキーニーの方法では，人口重心を出発点とし，この点を求める式と類似の式による反復計算をおこなう点に特徴が見いだせる。セイモーアの方法では，特にコンピューターの計算に適したように方形枠による反復計算をおこなうことに特徴が見られる。また，シュテンペルやボックス，ウイルソン等の方法では，移動費用の構成する曲面を見いだして，その曲面の最低点を探索することに，さらに，テリエの方法では，重量多角形を用いることに，それぞれ，その特徴が見られる。

いずれの方法も，その利点を見いだすことができるであろうが——たとえば，テリエの方法では，反復計算なしで，直接，人口中心点が得られるという利点がある——，これらの方法の中で，明解な手順によって，人口分布がいかに複雑な形態であっても，人口中心点を座標の位置によって与える得る方法としては，クーンとキーニーの方法を挙げることができよう。西岡も，移動費用最小点を見いだす方法を論じるとき，この方法がすぐれたものであることを指摘している[93]。

ところで，人口中心点には，興味ある性質があり，たとえば，A，B 2地点に，同数の人口が存在する場合には，II(2)で触れたように（式(2.1)～(2.4)を用いた説明の場所では，より一般的な地点が偶数の場合について論じた)，人口中心点は，AB 2地点間を結ぶ直線上の任意の地点に決定され得る。このことは，つぎのよううな簡単な式によって容易に理解される。すなわち，地点A，Bにおける人口をそれぞれPとするとき，AB 間の1地点へ集合するための総移動距離Sは，その地点がAB間を結ぶ直線上にあるとすれば，

$$\begin{aligned} S &= Px + P(L-x) \\ &= PL \qquad (6.68) \end{aligned}$$

という値になる。ただし，LはAB間の距離，xは，Aから集合地点までの距離である。式(6.68)によれば，Sは，xがどのような値であろうと，xに無関係に一定（PL）である。このことは，移動費最小の集合地点PはAB間の直線上の任意の地点でよいことを示している（いうまでもなく，これは，移動費最小の点が直線AB上の任意の点にあるということの完全な証明にはならないが——この直線以外の地点へ集合したときのSの性質(直線以外の地点では，三角形の2辺の和は他の1辺の長さより大となるのでそこでのSは直線AB上の点のもつSよりも大となる）も示すべきである——，ここでは，移動費最小の地点が直線AB上の任意の点であることを明示するために，移動費最小の点は，少なくとも直線AB上にあることが知られたことを前提として，式(6.68)のみを示した)。

ここで，クーンとキーニーの方法によると，このような地点Pがどのように得られるかを検討してみよう。問題を簡単にするため，地点Aの位置を(0,0)，Bのそれを(10,0)とし，Pを1とする。表1の記号に従えば$w_1=w_2=1$である。

まず，表1に従って，Pを算出してみると，その算出に用いられる表は，表2のようになる。その結果は，(5,0)となる。すなわち，Pの位置は，人口重心と等しくなる。

しかし，この場合，Pの位置は(2,0)でもよいのであるから，第1段階の計算の際に得られる$\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$として，2，0を与えてみる。そして，このとき，第2段階では，$\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$がどのようになるかを観察してみることにする。表3が$\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$の計算表である。$\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$が2，

93) 西岡久雄：前掲書，206頁.

表2　地点 A, B の人口中心点の算出表

(A) $\bar{x}$ の座標の算出表

地点 (1)	x_i (2)	w_i (3)	w_ix_i (4)	$d_i^{(1)}$の要素 (5)	$\frac{w_i}{d_i^{(1)}}=w_i^{(1)}$ (6)
$A(=P_1)$	0	1	0	$(0-5)^2=25$	$\frac{1}{5}=0.2$
$B(=P_2)$	10	1	10	$(10-5)^2=25$	$\frac{1}{5}=0.2$
	合計	2	10		
		$\bar{x}^{(1)}$	5		

	$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}x_i$ (4′)
	0.2	0
	0.2	2.0
合計	0.4	2.0
	$\bar{x}^{(2)}$	5

(B) $\bar{y}$ の座標の算出表

地点 (1)	y_i (2)	w_i (3)	w_iy_i (4)	$d_1^{(1)}$ の要素 (5)	$\frac{w_i}{d_i}=w_i^{(1)}$ (6)
$A(=P_1)$	0	1	0	$(0-0)^2=0$	$\frac{1}{5}=0.2$
$B(=P_2)$	0	1	0	$(0-0)^2=0$	$\frac{1}{5}=0.2$
	合計	2			
		$\bar{y}^{(1)}$	0		

	$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}y_i$ (4′)
	0.2	0
	0.2	0
合計	0.4	0
	$\bar{y}^{(2)}$	0

(C) d_i の算出表

地点 (1)	(x の $d_i^{(1)}$ の要素＋y の $d_i^{(1)}$ の要素)$^{\frac{1}{2}}=d_i^{(1)}$ (2)
$A(=P_1)$	$(25\ +\ 0)^{\frac{1}{2}}=\ 5$
$B(=P_2)$	$(25\ +\ 0)^{\frac{1}{2}}=\ 5$

表3　地点 A, B の人口中心点を最初 (2,0) と与えたときの人口中心点の算出表

(A) $\bar{x}$ の座標の算出表

地点 (1)	x_i (2)	w_i (3)	w_ix_i (4)	$d_i^{(1)}$ の要素 (5)	$\frac{x_i}{d_i^{(1)}}=w_i^{(1)}$ (6)
$A(=P_1)$	0	1	—	$(0-2)^2=4$	$\frac{1}{2}=0.500$
$B(=P_2)$	10	1	—	$(10-2)^2=64$	$\frac{1}{8}=0.125$
	合計	2	—		
		$\bar{x}^{(1)}$	2		

	$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}x_i$ (4′)
	0.500	0
	0.125	1.25
合計	0.625	1.25
	$\bar{x}^{(2)}$	2

(B) $\bar{y}$ の座標の算出表

地点 (1)	y_i (2)	w_i (3)	w_iy_i (4)	$d^{(1)}$ の要素 (5)	$\frac{w_i}{d_i^{(1)}}=w_i^{(1)}$
$A(=P_1)$	0	1	—	$(0-0)^2=0$	$\frac{1}{2}=0.500$
$B(=P_2)$	0	1	—	$(0-0)^2=0$	$\frac{1}{2}=0.125$
	合計	2	—		
		$\bar{y}^{(1)}$	0		

	$w_i^{(1)}$ (3′)	$w_i^{(1)}y_i$ (4′)
	0.500	0
	0.125	0
合計	0.625	0
	$\bar{y}^{(2)}$	0

(C) d_i の算出表

地点 (1)	(x の $d_i^{(1)}$ の要素＋y の $d_i^{(1)}$ の要素)$^{\frac{1}{2}}=d_i^{(1)}$ (2)
$A(=P_1)$	$(\ 4\ +\ 0)^{\frac{1}{2}}=\ 2$
$B(=P_2)$	$(64\ +\ 0)^{\frac{1}{2}}=\ 8$

0と与えられているので，まず，これらの値を，表3(A)，(B)の欄(4)の $\bar{x}^{(1)}$，$\bar{y}^{(1)}$ の欄に w_ix_i の計算を無視して記入する。その後は，表1あるいは表2と同様の方法で計算を進めて行くのである。$\bar{x}^{(2)}$，$\bar{y}^{(2)}$ の欄に見られるように，ここでも2，0という値が見られる。このことは，この方法でも，等しい人口をもっている2地点 AB の人口中心点は，直線 AB 上の任意の点に決定され得る（ただし，$x^{(1)}$，$y^{(1)}$ を最初指定しなければ，この方法では，この場合，人口重心が人口中心点となる）ことを示している。

Ⅶ 人口中心点と関連のある諸研究

（1）シュタイナーの研究

スタイナーは，すでに述べたように，シュタイナーの問題を提起したが，彼の問題は，シュタイナー点を求める問題であると同時に，「最小シュタイナー木」を求める問題でもあった。すなわち，3地点A，B，Cからシュタイナーの点に集まるためには，人々が移動する経路がなくてはならない。この経路は，いうまでもなく，シュタイナー点と3地点とを結ぶ直線である。この経路は，移動距離を最小にする経路であるために，「最小シュタイナー木」といわれる[94]。したがって，シュタイナーの問題は，シュタイナー点を求める問題であると同時に，最小シュタイナー木を求める問題でもあるのである。そして，シュタイナーの問題は，人口中心点の研究と同時に移動経路の研究へと発展して行ったのである。

シュタイナーの問題を発展させた人は，ウァーナー（C. Werner）であった。彼は，3つの固定点を結ぶ総交通費用最小の道路網（ネットワーク）は，ヴァリニョンの装置で与えられるような固定点に働く3つの張力の均衡点と固定点とを結ぶ直線群によって与えられるという結論に達したベックマン（M. J. Beckman）の研究を検討し，この研究を発展させた[95]。

ウァーナーは，2つの問題を考察した。その第1は，「3地点a，b，cがあり，aからbとcへのみ交通流があり，その量がf_{ab}，f_{ac}であるとき，その総交通費用を最小とさせるネットワークはどのようになるか」という問題である。いま，3地点の位置を（x_a，y_a），（x_b，y_b），（x_c，y_c）とし，三角形abc内部にある地点Pの位置を（x，y）とすれば（図11(A)），総交通費用Tは，

$$T=[C_1+(f_{ab}+f_{ac})C_2]\sqrt{(x_a-x)^2+(y_a-y)^2}+[C_1+f_{ab}C_2]\sqrt{(x_b-x)^2+(y_b-y)^2}+[C_1+f_{ac}C_2]\sqrt{(x_c-x)^2+(y_c-y)^2} \quad (7.1)$$

となる。ただし，C_1は単位距離あたり交通固定費用，C_2は単位距離，単位交通量あたり交通変動費用である。f_{ab}，f_{ac}は一定と仮定しているので，この式は，

$$T=k_1\sqrt{x^2+y^2}+k_2\sqrt{(x_b-x)^2+y^2}+k_3\sqrt{(x_c-x)^2+(y_c-y)^2} \quad (7.2)$$

で示される。ただし，ここでは，地点aを原点に，地点bがX軸上に存在するように，地点を移動させてある（図11(B)）。

点Pの位置を求めるために，Tをx，yに関して微分して0と置くと，

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{k_1x}{d_1}+\frac{k_2(x_b-x)}{d_2}+\frac{k_3(x_c-x)}{d_3}=0 \quad (7.3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k_1y}{d_1}+\frac{k_2y}{d_2}+\frac{k_3(y_c-y)}{d_3}=0 \quad (7.3.2)$$

となる。ただし，d_1，d_2，d_3は地点Pから地点a，b，cまでの距離である。角α，β，γを図11(B)に示されたような角であると定義すると，$x/d_1=\sin\alpha$，$y/d_1=\cos\alpha$等と書けるから，式(7.3.1)と(7.3.2)は，

$$k_1\sin\alpha-k_2\sin\beta-k_3\cos\gamma=0 \quad (7.4.1)$$

$$k_1\cos\alpha+k_2\cos\beta-k_2\sin\gamma=0 \quad (7.4.2)$$

と書ける。また，$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}$であることを用いて，上記の2式を1つの式に変形し，

$$k_1\cos\alpha+k_2\cos\beta-k_3\sqrt{1-[(k_1\sin\alpha-k_2\sin\beta)/k_3]^2}=0 \quad (7.5)$$

という式を得ることができる。この式は，さらに，

$$k_1^2\cos^2\alpha+2k_1k_2\cos\alpha\cos\beta+k_2^2\cos^2\beta=k_3^2-k_1^2\sin^2\alpha+2k_1k_2\sin\alpha\sin\beta-k_2^2\sin^2\beta$$

94）奥野隆史，高森寛：前掲書，164頁。

95）奥野隆史，高森寛：前掲書，165-173頁。
M. J. Beckmann : "Principles of Optimum Location for Transportation Networks," W. L. Garrison and D. F. Marble (eds.) : *Quantitative Geography*, Northwestern University, Studies in Geography, No. 13, 1967, pp. 95-119.
C. Werner : "The Role of Topology and Geometry in Optimal Network Design," Regional Science Association, Papers, Vol. 21, 1968, pp. 173-189.

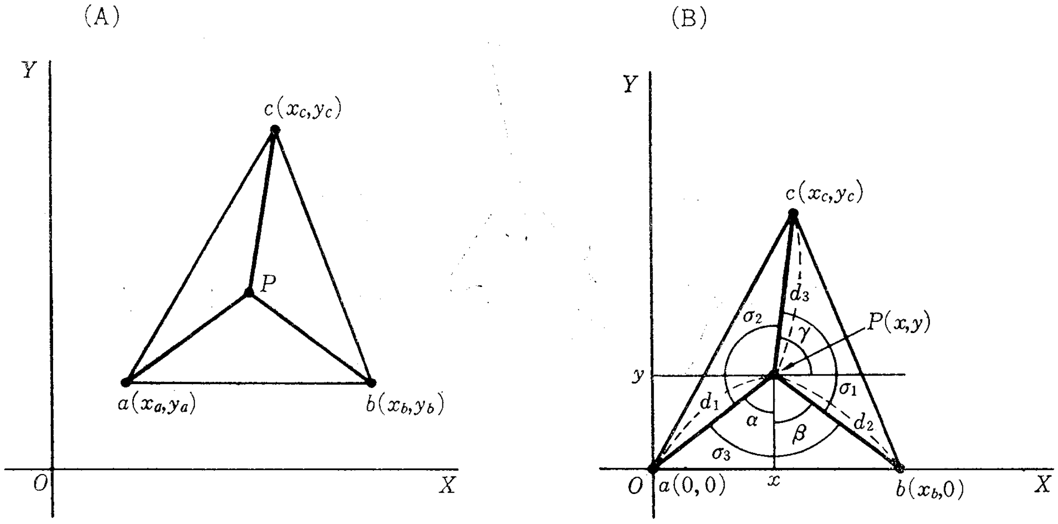


図11　ウァーナーの問題における３地点とネットワーク

(7.6)

という形にすることができる。この式は,

$$2k_1k_2\cos(\alpha+\beta)=k_3^2-k_1^2-k_2^2 \quad (7.7)$$

となる。したがって，$\alpha+\beta=\sigma_3$ とすれば,

$$\cos\sigma_3=(k_3^2-k_1^2-k_2^2)/2k_1k_2 \quad (7.8)$$

が得られる。同様に，σ_1，σ_2 を図11(B)に示されるような角度とすれば,

$$\cos\sigma_1=(k_1^2-k_2^2-k_3^2)/2k_2k_3 \quad (7.9)$$

$$\cos\sigma_2=(k_2^2-k_1^2-k_3^2)/2k_1k_3 \quad (7.10)$$

が得られる。求めようとするネットワークは図11(B)の σ_1，σ_2，σ_3 の大きさがここで得られる σ_1，σ_2，σ_3 によって決定される値をもつようなネットワークである。

ウァーナーの第２の問題は,「３地点の各地点から他の２地点へ交通流が発生するとき，総交通費用が最小となるネットワークはどのようなものか」という問題である。この問題は，第１の問題を部分的に適用して解かれる。すなわち，ウァーナーの第２の問題におけるネットワークの形は，一般に図11のような１つの分岐点をもつようなものではなく，図12に示されるような３つの分岐点をもつものであるので，まず，点 P_2，P_3 を仮りの固定地点とみなして，第１の問題の解法により，角 ρ_1 を見いだす。ただし，$f_{PQ}(P=a, b, c\,; Q=a, b, c)$ は，地点 P から Q へ移動する交通流の量である。同様に，点 P_1，P_3 および点 P_1，P_2 を固定して，仮りの ρ_2，ρ_3 を見いだす。ρ_1，ρ_2，ρ_3 の総和は180°になるべきであるが，上述のような前提の下に算出されたものであるから，そのような条件は満足されていない。したがって，P_1, P_2, P_3 の位置を調整しながら,

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=180° \quad (7.11)$$

という条件が満たされるように，P_1，P_2，P_3 の位置が決定されるのである。

しかしながら，ここで得られた解は，その性質上，ただ１つのネットワークの形を与えない。なんとなれば，この解では，点 P_i，P_j 間（$i=1, 2, 3\,; j=1, 2, 3$）の距離が与えられているのではなく，ρ_i（$i=1, 2, 3$）のみが与えられているからである。したがって，たとえば，図12の図形が１つの解であるとすると，中心部にある三角形状のネットワークを小さくしたものも，また大きくしたものも解となる。しかも，これらの無数に得られるネットワークの総交通費用は，すべて同一であることが証明されている[96]。

（２）ミールの研究

ウァーナーは，シュタイナーの問題のうち，シュタイナー点ではなく最小シュタイナー木に注目し，しかも，各地点の交通発生量を任意に与えることによって，この問題を一般化したが，これとは異なった方向への拡張を試みた研究が

96）奥野隆史，高森寛：前掲書，171-172頁.

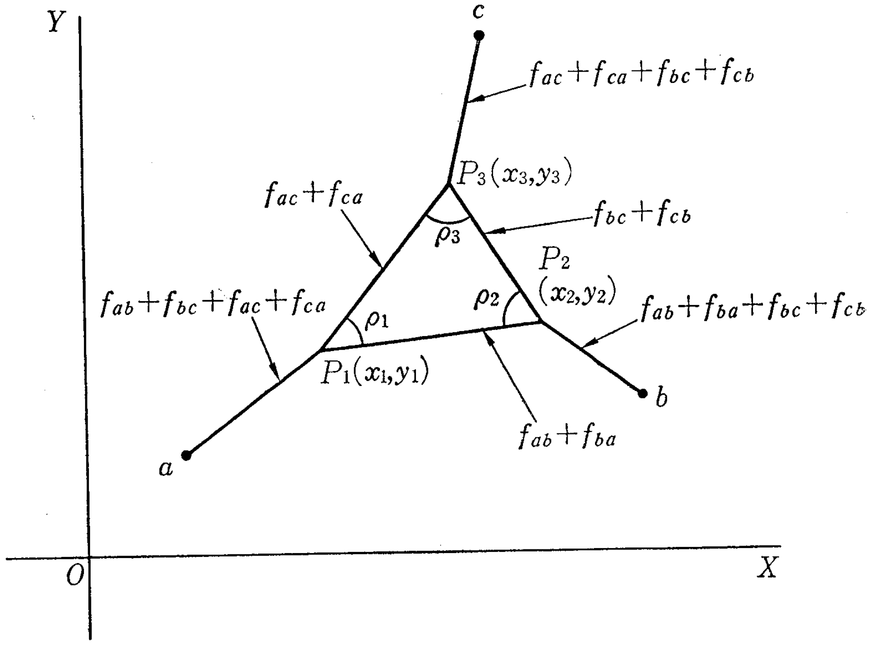
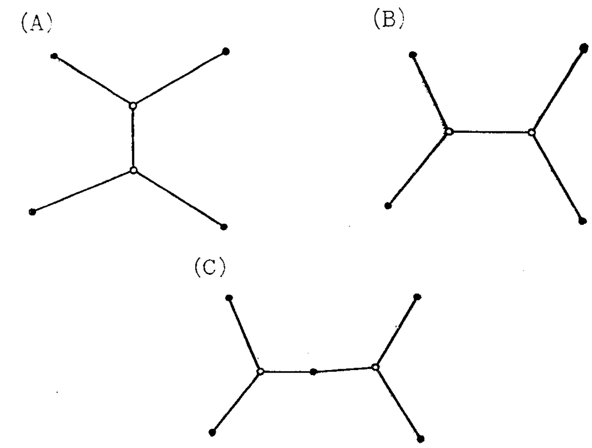


図12 ウァーナーの第2の問題のネットワーク

ある。それは，ミール（W. Miehle）の研究である。

ミールは，任意の交通発生量は仮定せず，そのかわりに，人の居住する地点数を n 個とした。$n=4$ とした問題は，すでにVI(2)で述べたように，クーラントとロビンスによって考察されたが，それ以上の大きさの n をもつシュタイナーの問題は，1958年，ミールによってはじめて取扱われた[97]。

ミールは，n 個の人の居住地を連結する最短経路がどのようなものであるかを考察した。いま，第 i 番目の居住地の座標を $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ としたとき，これらを結ぶネットワークの形は，1個ではなく，後（1968年）に，ギルバートとポラック（E. N. Gilbert and H. O. Pollak）が考察した結果によれば，経路の分岐点（これも一種のシュタイナー点とみなされる[98]）の個数は，少なくとも $n-2$ 個であり（図13は，その1例である），そのシュタイナー点の個数が m のとき，経路の全長が最短となる経路（ネットワーク）の形状の種類 $F(n, m)$ は，



（注） 黒点が人の居住地点，直線が経路，白点がシュタイナー点である．

図13 人の居住地点が n（>3）個のときのシュタイナー点の1例

$$F(n, m)=2^{-m}{}_nC_{m+2}\frac{(n+m-2)!}{m!} \qquad (7.12)$$

となる[99]。したがって，最短経路を求めるためには，まず，mを決めなければならない。このmの数は，自由に主観的に決定し得る。mが決定されたならば，このm個のシュタイナー点の位置が下記の式の D を $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ に関して偏微分した結果を0とすることによって得られる。

$$D=\sqrt{(x_1-\bar{x}_1)^2+(y_1-\bar{y}_1)^2}$$

97） 奥野隆史，高森寛：前掲書，173-177頁.
W. Miehle: "Link-length Minimization in Networks," *Operations Research*, Vol. 6, pp. 232-243, 1958.

98） 奥野隆史，高森寛：前掲書，175頁.

99） 奥野隆史，高森寛：前掲書，175頁.

$$+\sqrt{(x_1-\bar{x}_2)^2+(y_1-\bar{y}_2)^2}+$$
$$\cdots+\sqrt{(x_n-\bar{x}_m)^2+(y_n-\bar{y}_m)^2}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sqrt{(x_i-\bar{x}_j)^2+(y_i-\bar{y}_i)^2} \qquad (7.13)$$

ただし，$\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$($j=1, 2, \cdots, m$) は第 j 番目のシュタイナー点の位置を示すX軸，Y軸上の位置である。この D を $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ に関して微分して，その結果を 0 と置けば，

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{x}_j}=0 \quad (j=1, 2, \cdots, m) \qquad (7.14.1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{y}_j}=0 \quad (j=1, 2, \cdots, m) \qquad (7.14.2)$$

となる。この式を満足する $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ の値 $\bar{x}_j$*, $\bar{y}_j$* が，シュタイナー点の位置であり，これらの点を通る経路が全長最短の経路であるとみなしたのである[100]。

（3）道路中心点の研究

人口中心点とは異なるがこれに非常に近い研究が，すでに19世紀におこなわれている。それは，道路を前提とした移動距離の考察である。人口中心点の算出においては，人々が経路の有無には無関係に，直線的に移動し得ることを前提としていたが，ここでは，人々は，道路上のみを移動できるという前提が用いられる。そして，この研究では，その前提の下に，ある地点に人々が集合するとき，その総移動距離が最小となる地点が見いだされるのである。この点は，今日，ドイツ語でフィアール・プンクト (Vialpunkt) と呼ばれているが，筆者はこれを「道路中心点」と訳した[101]。これをはじめて提唱した人は，フラスケンパーによれば，アウグスト・フェップル (August Föppl) である。彼の研究は，1884年に発表されたまま，長い間知られることがなかったが，1934年技師ハンス・ゲッツ (Hans Götz) によって再構成された[102]。

この点は，今日，グラフ理論(graph theory) の中でグラフのメディアン (median) といわれているものと一致する。18世紀に，オイラー (Leonald Euler) によって創始されたグラフ理論[103]においては，点と線によって構成された図形の性質について研究がおこなわれているが，この種の理論において，グラフのメディアンと呼ばれる点がある。この点は，シンベル(Alfonso Shimbel) によって提案されたものであり，各点から他の点までの線上の距離（これは，各点から他のある点まで移動する場合，それらの点を結ぶ線の上を移動すると仮定した場合の最短移動距離である）の和が最小となるような点を指す[104]。すなわち，いま，n 個の点が線で結ばれていて，第 i 点 v_i から第 j 点 v_j までの線上の距離を d_{ij} としたとき，

$$S=\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (7.15)$$

で定義される d_{ij} の和を最小にする点 i* をグラフのメディアンというのである。奥平によれば，ゴールドスタイン (A. J. Goldstein) は，グラフの線上の任意の点Pからすべての点までの距離 d_{Pi} の和 S'，すなわち，

$$S'=\sum_{i=1}^{n} d_{Pi} \qquad (7.16)$$

が最小となる点について検討したところ，興味あることには，Pは，いずれかの点に一致し，点と点を連結する線上の点にはならないことを証明した[105]。

なお，このような点が，グラフの中心 (center) と呼ばれず，メディアンと呼ばれる理由

100) 奥野隆史，高森寛：前掲書，173-189頁.
101) 鈴木啓祐訳編：前掲書，55頁，74-76頁.
102) P. Flaskämper : op. cit., S. 122-124.
August Föppl : „Über das 'Vial'," Schweizervische Bauzeitung, Nr. 15, von 12, April, 1884.
Hans Götz : „Zur Mathematik des Vials," Planungswissenschaftliche Arbeitsgemeinschaft, 1934, H. 1 und 2.
103) 池田貞雄訳，フランク・ハラリイ著『グラフ理論』，東京，共立出版，昭和46年，1頁.
104) Alfonso Shimbel : "Structural Parameters of Communication Networks," *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 15, 1953, pp. 501-507.
Edward J. Taaffe and Howard L. Gauthier, Jr.: *Geography of Transportation*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1973, pp. 131-138.
奥野隆史訳，E. J. テーフ，H. L. ゴージェ共著『地域交通論』，東京，大明堂，昭和50年，145-149頁.
105) 奥平耕造：『都市工学読本』，東京，彰国社，昭和51年，176-177頁.

は，Ⅱ(2)に示したように，一直線上に点が分布するとき，その中央にある点（中位点, median point）は，他の点との距離の和が最小になる点となるという性質をもっているが，グラフのメディアンも，これに似た「他の点との距離の和が最小になる」という性質をもっているためであるといえよう。

Ⅷ 結 語

分散して分布する人々が１点に集合するとき，その人々の移動距離の総和が最小となる地点すなわち，人口中心点はいかなる場所にあるかという簡単のようでいて困難な問題は，ようやく最近になってクーンとキーニーによって数学的に解かれ，またその他の人々によって種々の方法で解かれるようになったが，この問題に対する研究はここで見たように，きわめて長い期間続けられて来た。こうした１個の明確に提起された問題に対して，多くの人々が研究をおこない，１つの長期間の研究史をつくり上げて来たことは，きわめて興味あることであると思う。

昨年は，アメリカの２学者，イリノイ大学のハーケン（W. Haken），アペル（K. Appel）両教授によって，地図の『４色問題（four color problem)』(「いかなる地図も４色を用いて塗り分けられ得るか」という数学上の問題）が解かれたが[106)]，この問題も130年間の議論の末，ついに，解決されたのである。筆者は，他の場所でも強調したように[107)]，この研究史は，上記の４色問題のそれにも似ている。人口中心点の問題は，早くも17世紀にフェルマーによって提起され，今日，クーン等（ならびにその他の人人）によって完全に数学的に解かれた。問題の提起からその一般的解法が得られるまで実に，約300年間の研究がなされた。ここでは，この長期間における諸研究の重要な点をできるだけ明確にとらえ，いかなる道程をへて，この問題が解決されることになったかを考察して見た。

ここでの考察によれば，人口中心点そのものの研究は，要約するとシュタイナーの問題，ウェーバーの問題，そして，一般化されたウェーバーの問題という３つの型の問題を解く研究であったといえる。これらの研究によって，１地点への総移動距離の最小となる点がどこにあるかということが歩一歩と明確にされて行った。一時，人口重心がこの人口中心点と同じものではないかという誤った認識が発生した。しかし，この誤りは，間もなく確認され，さらに，人口中心点の研究へ刺戟を与えた。他方，人口中心点の研究はこれ以外の研究に対しても影響を与えた。実際，シュタイナーの問題は，総移動距離最小点の研究から総移動距離最小経路の研究へと発展した。また，この研究と類似した研究も現れた。それは，道路中心点，あるいは，グラフのメディアンの研究である。

このように眺めてみると，人口中心点の研究は，それ自身前進しながら，他の研究分野へ影響を与えたり，類似の研究と密接な関係をもっていたりすることが明確になる。いま，これらの研究部門間の関係を図示してみると図14のようになるであろう。ただし，図中の矢印は，ある研究の他の研究への影響の方向，あるいは，２つの研究間の関係の存在を示す記号であり，矢印に付加された説明は，その影響や関係の内容を示したものである。このような図を作成することにより，人口中心点の研究の歴史的推移が明確に理解されるであろう。

人口中心点の研究は，その研究の中にウェーバーの問題が含まれていることからも明らかなように，立地の研究と結びついた研究である。また，人口重心の調査研究と関係をもっていることから人口分布の研究との関係をもっている。そして，これまでの議論や図14からも知られるように，この研究は発展して，経路の研究，いいかえれば，交通問題の１研究分野をも形成するようになった。人口中心点の研究はこのよう

106) 『朝日新聞』，東京，朝日新聞社，1976年８月31日朝刊，第３，４面.
『数学セミナー』第15巻，第11号，東京，日本評論社，昭和51年，24-25頁.
『サイエンス』第６巻第12号，1976年12号，東京，日本経済新聞社，47-48頁.
鈴木啓祐訳編：前掲書，６頁.
107) 鈴木啓祐訳編：前掲書，６頁.

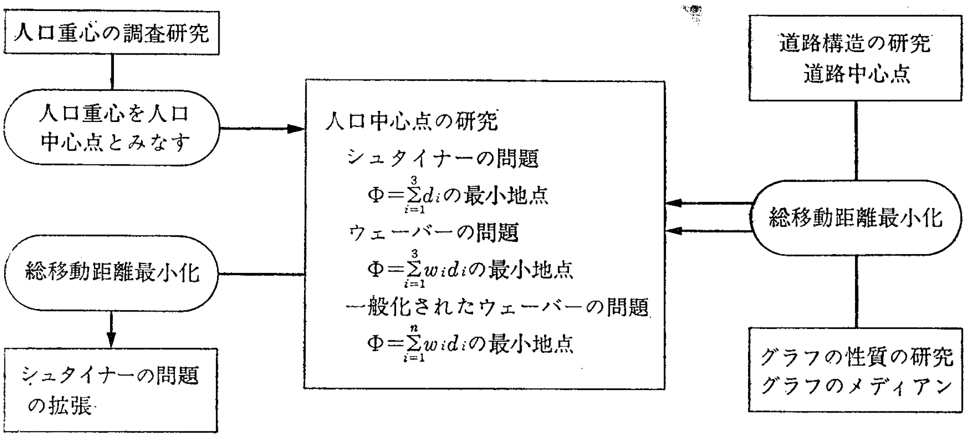


図 14 人口中心点の研究とそれに関連のある諸研究との関係

に，現実の諸問題と密接なかかわり合いをもち，今後も，この研究分野と関係のある研究がおこなわれるであろう。この小論も，人口中心点の研究のこのような特徴を研究の歴史的推移を通して浮き彫りにして示したいためにおこなったものである。

なお，各種の研究の時間的前後関係をより明確に示すために，研究史年表を作成し，最後につけ加えることにした。

研究史年表

（ ）内の数字は，本論文の章，および節の番号であり，その章および節においてこの表に書かれた事実が述べられていることを示す。

1601 - 1665年 フェルマーが人口中心点の問題を最大最小の練習問題として提起する。（VI(1)）

1608 - 1674年 トリチェッリーが人口中心点（フェルマーの問題）を幾何学的に見いだす方法を発見する。（VI(1)）

1800年代初期 シュタイナーがシュタイナーの問題を提示する。（VI(2)）

1846年 ファスベンダーが，今日，シュタイナーの問題と呼ばれている問題について検討する。（VI(1)）

1872年 ヒルガードがウォーカーの人口重心の計算をおこなうために用いることになった資料を作成する。（II(1)）

1874年 エール大学シェフィールド・サイエンティフィック・スクールのウォーカーが第9回合衆国センサス報告書に最初の人口重心の定義を書き，人口重心の位置を地図上に書く。（II(1)）

1882年 ラウンハルトが今日ウェーバーの問題と呼ばれている問題の解を数学的にならびに幾何学的に見いだす方法（極の原理による方法）を提唱する。（VI(4)）

1884年 フェップルが道路中心点を提唱する。（VII(3)）

1901年 マッハがヴァリニョンの装置についての説明を書く。（VI(3)）

1906年 合衆国人口調査報告書にはじめて合衆国の1970年からの人口重心の計算結果が掲載される。これらの人口重心をはじめて掲載した報告書は，合衆国第12回人口調査（1900年）報告書である。（IV(1)）

1913年 第13回センサス報告書に人口重心の誤った解釈が記載される。（III(1)）

1914年 第13回センサスの統計地図に人口重心の誤った解釈が記載される。（III(1)）

1916年 タウンが『社会問題』の中で，人口重心に関する誤った記述をおこなう。（III(2)）

1922年 ウェーバーが，今日，「ウェーバーの問題」と名づけられている問題を論じ，重量三角形によってこの問題の解が得られることを明らかにする。（VI(3)）

1922年 ピックがヴァリニョンの装置によって「ウェーバーの問題」が解けることを提唱する。（VI(3)）

1922年 マンローとオザンヌが『社会市政学』の中で人口重心に関する誤った意味付けを記述する。（III(2)）

1922年 高岡熊雄が北海道の人口重心を測定する。（IV(4)）

1923年 スローンによる人口重心の誤った解釈が，第14回センサス報告書の別冊に，公表される。（II(2)）

1925年 イールズがヒルガードの論文（1872年）を検討する。（II(1)）

1926年　ラップが『実践社会科学』の中で人口重心に関する合衆国センサス報告書の誤った記述を引用する。(Ⅲ(2))
1928年　井上謙二がわが国の人口重心とその移動について論じる。(Ⅳ(4))
1929年　ブルクハルトが，旧ザクセン王国の1910年と1925年の人口重心が計算されていることを明らかにする。(Ⅳ(3))
1930年？　ウェーゲマンが1910年から1925年までのドイツ帝国全体の人口重心を示す。(Ⅳ(3))
1930年　イールズが，第14回センサス報告書の別冊に書かれた人口重心の意味の誤りを指摘する。(Ⅱ(2))
1930年　イールズが，直線上の点からある点までの距離の絶対値の和のうち，最小のそれはそのある点が中位点であるときに与えられるという性質を人口分布の考察に適用する。(Ⅱ(2))
1930年　リチャード・ベンソンが社会学の教科書に人口重心に関する誤った記述のあることを指摘する。(Ⅲ(2))
1931年　井上謙二が人口重心について論じる。(Ⅳ(4))
1931年　合衆国第15回人口調査報告書において，人口重心の移動距離最小に関する説明を削除する。(Ⅳ(1))
1933年　メトロン誌上に多数の学者が協力して多くの国の人口重心の測定結果を発表する。(Ⅲ(3))
1934年　ゲッツが道路中心点の再考察をおこなう。(Ⅶ(3))
1935年　パランダーがラウンハルトの極の原理の方法を論じる。(Ⅵ(4))
1935年　パランダーが極の原理について論じる。(Ⅵ(4))
1935年　パランダーが等費用線による輸送費最小地点の決定法を提唱する。(Ⅵ(5))
1937年　フーバーが等費用線による輸送費最小地点の決定法を主張する。(Ⅵ(5))
1937年　ワイスフェルトが一般化されたウェーバーの問題の解決を試みる。しかし，その議論には誤りが含まれている。(Ⅵ(6))
1938年　デイーンが，重量三角形に関する検討をおこなう。(Ⅵ(3))
1939年　ユベールがフランスの人口重心につき研究をおこなう。(Ⅳ(2))
1941年　クーラントとロビンスが，3地点と4地点が与えられたときのシュタイナー点の研究をおこなう。(Ⅵ(2))
1944年　カリーがクーンとキーニーの用いた式の値が収束する性質のあることを証明する。(Ⅵ(6))
1949年　平木文雄がわが国の明治以前以後および，東北，関東地方の府県別人口重心を測定する。(Ⅳ(4))
1952年　舘稔，上田正夫が「日本の人口」『日本地理新大系　第2巻　社会，経済』において日本の人口重心について論じる。(Ⅳ(4))
1953年　シンベルが接近性 (accessibility) の指標を提唱する。(Ⅶ(3))
1954年　斎藤聡が『統計東京』において人口重心について論じる。(Ⅳ(4))
1954年　東京都総務局企画部が関東地方の人口重心について論じる。(Ⅳ(4))
1954年　川上光雄が東京都の人口重心の動きを論じる。(Ⅳ(4))
1954年　米谷静二が鹿児島県の人口重心を論じる。(Ⅳ(4))
1954年　ポリアがヴァリニョンの装置について説明をおこなう。(Ⅵ(3))
1955年　江沢譲爾がラウンハルトの研究を日本に紹介する。(Ⅵ(4))
1955年　総理府統計局が昭和25年の国勢調査報告書にはじめてわが国の人口重心を記載する。(Ⅳ(4))
1956年　アイザードがウェーバーの問題をより一般的な形で定式化する。(Ⅵ(3))
1956年　アイザードが極の原理を紹介し，立地の問題を論じる。(Ⅵ(4))
1958年　ミールがシュタイナーの問題の拡張を試みる。(Ⅶ(2))
1958年　ミールがヴァリニョンの装置について説明をおこなう。(Ⅵ(3))
1960年　舘稔は人口重心に関して論争のあることについて，『形式人口学』の中で論じる。(Ⅲ(3))
1962年　クーンとキーニーが一般化されたウェーバーの問題を数学的方法で解いた。(Ⅵ(6))
1962年　フラスケンパーが道路中心点について論じる。(Ⅶ(3))
1965年　セイモーアがコンピューターに適した人口中心点の算出方法をみいだす。(Ⅵ(7))
1967年　シュテンペルが「単一ファクター法」により人口中心点を見いだす方法を提案する。(Ⅵ(8))
1967年　シュテンペルがボックス，ウィルソン等の「最急傾斜法」をも人口中心に点を見いだす方法として用いる。(Ⅵ(8))
1967年　ベックマンが交通問題の研究においてシュタイナー点を取り上げる。(Ⅶ(1))
1968年　ウァーナーがベックマンの研究を発展させる。(Ⅶ(1))
1968年　ギルバートとポラックがミールのネットワー

クの種類数を考察する。(VII(2))
1972年 テリエが一般的化されたウェーバーの問題を解く方法を提唱する。(VI(9))
1973年 江沢がクーンとキーニーの論文を紹介する。(VI(6))
1973年 江沢がシュテンペルの研究を紹介する。(VI(8))
1975年 東京都総務局で東京都の人口重心を計測する。(IV(4))
1976年 西岡がラウンハルトの極の原理を紹介する。(VI(4))
1976年 西岡が，クーンとキーニーの研究を紹介する。(VI(6))
1976年 西岡がセイモーアの人口中心点の算出法を紹介する。(VI(7))
1976年 西岡がテリエの方法を紹介する。(VI(9))
1976年 奥野，高森がベックマン，ウァーナーおよびミールの研究を紹介する。(VII(1))
1977年 鈴木がクーンとキーニーの論文を飜訳する。(VI(6))

Synopsis

SUZUKI, KEISUKE: A Historical Review of the Study of the "Central Point of Population," *The Journal of Ryūtsū Keizai University* (*Ryūtsū Keizai Daigaku Ronshū*) Vol. 12, No. 2, 1977/11, pp. 1-37.

It had been a great problem to find the central point of population or the point which people can all reach with the minimum aggregate of travel.

According to the study by Kuhn and Kuenne, the problem was discussed by Fermat early in 17th century. This problem was resolved mathematically by Kuhn and Kuenne in 1962.

This problem can be classified into three types of problems, Steiner's problem, Weber problem, and generalized Weber problem. Characteristics of these problems are expressed by the following equations:

$$\phi=\sum_{i=1}^{3} d_i \qquad (1)$$

$$\phi=\sum_{i=1}^{3} w_i d_i \qquad (2)$$

$$\phi=\sum_{i=1}^{n} w_i d_i \qquad (3)$$

where d_i is a distance between the ith point and a point to which people go to meet and w_i the number of people living at the ith point. In Steiner's problem, a point which minimizes the Φ in equation (1) is obtained. In Weber and generalized Weber problems, points which minimize the ϕ's in equations (2) and (3) are obtained, respectively.

Many studies are done for obtaining the point which minimizes the ϕ in equations (1), (2), and (3).

In this paper, the studies are examined historically. And, a chronological table of the studies was made.

I have read many papers and books to write this paper. I have, especially, much impressed from the following books and papers:

Weber, Alfred: *Ueber den Standort der Industrien*, Tübingen, 1922.

Eells, Walter Crosby: "A Mistaken Conception of the Center of Population," *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 25, March, 1930, pp. 33-40.

Isard, Walter: *Location and Space Economy,* New York, 1956.

Flaskämper: *Bevölkerungsstatistik,* Hamburg, 1962.

Kuhn, Harold W. and Robert, E. Kuenne: "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics," *Journal of Regional Science,* Vol. 4, No. 2, Winter, 1962, pp. 21-32.

Nishioka, Hisao: *Keizai Chiri Bunseki* (*Analysis in Economic Geography*), Tokyo, 1976.

Okuno, Takashi and Takamori, Hiroshi: *Ten to Sen no Sekai* (*The World of Points and Lines*), Tokyo, 1976.