生産要素の数が生産物の数よりも多い場合の要素価格均等化に関するノート

石　沢　末　三

I

要素価格均等化(Factor Price Equalization)に関する議論[1]の核心は，ある二国——α国，β国；両国は同一の一次同次生産関数をもっているが，要素賦存量（v^{α}；v^{β}）は異なっている——の要素価格（w^{α}；w^{β}）が，要素の国際移動を伴わない生産物だけの国際貿易を通して均等化（$w^{\alpha}=w^{\beta}$）するかどうかを解明する点にある。この問題は Hecksher 〈2〉，Ohlin 〈8〉に端を発し，Samuelson 〈11〉による n 生産要素，n 生産物のケースの数学的定式化へと発展した。他方 Gale-Nikaido 〈3〉による非線型写像の大局的一意性（Global univalence of nonlinear mapping）の議論を通して要素価格均等化の条件と関税の要素価格の及ぼす影響の仕方（Samuelson-Stolper の定理[2]），及び要素賦存量の産出量へ及ぼす影響の仕方（Rybczynskiの定理[3]）とが密接不可分の関係にある事が明らかにされた[4,5]。

---

1) 議論展開の前提条件に関してはⅢ節〈ⅰ〉～〈iv〉を参照.

2) Samuelson, P. A. & Stolper, W. F. 〈10〉

3) Rybczynski, T. M. 〈9〉

4) Chipman, J. S.〈1〉, Inada, K.〈4〉, Kemp, M. C., Uekawa, Y. & Wegge, L. L. F.〈5〉, Nikaido, F. 〈5〉, Nikaido, F.〈7〉 ch. 7.

5) 以上の事を概説すれば次の様に成るのであろう．
市場均衡条件は一次同次生産関数の下では

$$p_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{k}\,w_j^{k} \qquad \text{(n. 1)}$$

$$v_j^{k}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{k}\,x_i^{k} \qquad \text{(n. 2)}$$

で与えられる．但し

a_{ij}^{k}：k 国の i 産業が一単位の生産物を作り出すのに必要な j 番目の生産要素量．（この値がどの様にして決まるかはⅡ節参照）．

w_j^{k} ：k 国の j 番目の生産要素価格．

x_i^{k} ：k 国の i 番目の産業の産出量水準．

p_i ：i 番目の生産物価格（国際貿易を通じて両国に共通の価格が与えられる）．

v_j^{k} ；k 国の j 番目の要素賦存量（要素価格の水準にかかわらず v_j^{k} は一定）．

両国が同一かつ一次同次の生産関数を有するという前提の下では，

$$a_{ij}^{k}=a_{ij}(w_1,\ \cdots\cdots,\ w_n) \qquad \text{(n. 3)}$$
$$(i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ n\ ;\ k=\alpha,\ \beta)$$

となる．
(n·3) 式を考慮し，(n.1)，(n.2) 式を行列表示すると

$$p=A(w^{k})\boldsymbol{w}^{k}\equiv f(w^{k}) \qquad \text{(n.1)}'$$

$$v^{k}=\boldsymbol{A}'(w^{k})x^{k} \qquad \text{(n.2)}'$$

但し

$$A(w^{k})\equiv\begin{pmatrix} a_{11}(\boldsymbol{w}^{k}), & \cdots\cdots, & a_{1n}(\boldsymbol{w}^{k}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\boldsymbol{w}^{k}), & \cdots\cdots, & a_{nn}(\boldsymbol{w}^{k}) \end{pmatrix}\text{：投入係数行列}$$

$$w^{k}\equiv(w_1{}^{k},\cdots\cdots,w_n{}^{k})'>0$$
$$x^{k}\equiv(x_1{}^{k},\cdots\cdots,x_n{}^{k})'>0$$
$$p\equiv(p_1,\cdots\cdots,p_n)'>0$$

要素価格均等化の成否を問題にする時には非負解の存在を仮定して議論が進められる．我々は解の存在問題に注目しているのではないから，更に仮定を強めて以下の議論では正の解の存在を仮定して論を進める．

(n.1) (*or* (n.1)′) 式は n 個の方程式と n 個の未知数（$\boldsymbol{w}^{k}$）から成っており，解の存在を前提しているから，その解の大局的一意性の充分条件は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}^{k})$ のヤコービアン行列（Jacobian matrix）$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^{k})$ の全ての主座小行列（principal minor）式が正すなわち——$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^{k})$ が $\boldsymbol{P}$-matrix（Gale-Nikaido〈3〉を参照）——に成る事である．$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w}^{k})$ の（i，l）要素は

$$\frac{\partial}{\partial w_l{}^{k}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{w}^{k})w_j{}^{k}=a_{il}(w^{k})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial w_l{}^{k}}w_j{}^{k}$$
$$=a_{il}\ (w^{k})$$

であるから，

$$\boldsymbol{J}(w^{k})=A(w^{k})$$

となる．

それ故，投入係数行列 $A(w^{k})$ が $\boldsymbol{P}$-matrix であれば，解の大局的一意性が保証され，両国の要素価格が↗

これ等の関係は，n 生産要素，n 生産物という一般的前提の下で得られたものであるが，生産要素と生産物の数が等しいという前提の下では成立するというかなり厳しい結論である。現実性という事を考慮すれば後者を更に一般化する必要がある。例えば Kuga〈6〉は生産物の数が生産要素のそれよりも多いケースでの要素価格均等化が成立する条件を導出したが，そこでの分析手法は従来のそれとは異なり，生産関数を土台にして一旦社会的転換曲線を導き出し，要素価格を対応する生産要素の限界生産力と定義し議論を進めている。彼は更に生産要素の数が生産物のそれよりも多い場合をも考慮しているが，得られた結論はこのケースでは要素価格の均等化が成立しないという事である。この小論ではこのケース，すなわち要素価格の数が生産物のそれよりも多いケースを取り扱う[6]。その目的はこのケースに於る要素価格の均等化が成立する為の充分条件を提示する事にある。

II 節は生産関数に関する前提，及びそれらの生産関数に基づいた企業の主体的均衡条件の記述にあてられる。III節は最小化問題〈M. P.〉（III節参照）の解が市場均衡の解になっているという性質を使って，我々のケースに於る要素価格均等化の論証に費やされる。

II

生産関数 $f(a)$[7] は次の条件を満たすものと仮定する。

〈A.1〉: $f(a)$ は $R_+{}^m$ 上で定義されている実数値関数であり，値域は $R_+{}^1$ である。

〈A.2〉: $f(a)$ は a に関して一次同次かつ強い意味で擬凹関数 (a strictly quasi-concave function) である。

〈A.3〉: $f(a)$ は各々の要素 (argument) に関して二階連続微分可能である。

〈A.4〉: $f(a)=0$ は $a=0$ を意味する。

〈Remark I〉[8]

〈A.2〉より $f(a)$ は原点を除く $R_+{}^m$ 上で次

↘均等化する．すなわち

$$w^\alpha=w^\beta=w(p) \qquad \text{(n.4)}$$

と書く事ができる．

他方 Samuelson-Stolper (Rybczynski) の定理内容が関係する $[A(\boldsymbol{w})]^{-1}$ ($[A'(\boldsymbol{w})]^{-1}$) に一定の条件―その非対角要素が非正で，各行にすくなくともひとつの負の非対角要素が存在するという条件を賦すると，$A(w)$ が $\boldsymbol{P}$-matrix になる．それ故(n.4)式，要素価格の均等化が成立する．(Nikaido〈7〉, pp. 391-2. Inada〈4〉, Kemp, Uekawa, Wegge〈5〉参照)

6) このケースを行列表示すれば，

$$\left.\begin{aligned} p&=A_I(w^k)w_I{}^k+A_{II}(w^k)w_{II}{}^k \\ v_I{}^k&=A_I{}'(w^k)x^k \\ v_{II}{}^k&=A_{II}{}'(w^k)x^k \end{aligned}\right\} \qquad \text{(n.5)}$$

但し

$$A(w^k)\equiv\left.\Big(\underbrace{A_I(w^k)}_{n\text{列}} \vdots \underbrace{A_{II}(w^k)}_{m-n\text{列}}\Big)\right\}n\text{列}$$

$$w^k\equiv\Big(\underbrace{w_I{}^k}_{n\text{列}} \vdots \underbrace{w_{II}{}^k}_{m-n\text{列}}\Big)' \qquad v^k\equiv\Big(\underbrace{v_I{}^k}_{n} \vdots \underbrace{v_{II}{}^k}_{m-n\text{列}}\Big)$$

となる．(n.5) 式より明らかな様に，要素価格 w^k は明示的に要素賦存量 v^k に依存する．

$$w^k=w(p;\ v^k)$$

それ故，一般的には，

$$w^\alpha\neq w^\beta \quad \text{if} \quad v^\alpha\neq v^\beta \qquad \text{(n.6)}$$

が成立するであろう．

(n.6) 式に対するトリビアルな反例として二国間の要素賦存量が次の関係を満たすケースが考えられる．

$$v^\alpha=t\,v^\beta \qquad \text{for } {}^\exists t>0,\ t\neq1.$$

このケースでは，$v^\alpha\neq v^\beta$ ではあるが，

$w^\alpha=w^\beta$ が成立する．((n.5) 式参照)

7) 国と産業を明示的に表わしたい時には，スーパースクリプト k, i を附す．$f^{ki}(a)$ は k 国の i 番目の産業の生産関数という意味である．記号の簡素化の為に必要な時以外はスーパースクリプトは書かない事とする．

8) 証明は次の二つのケースに分けて行なわれる．

$$\begin{cases} \text{(i)} & a^2=\lambda a^1 \quad \text{for some scalar } \lambda(\neq0) \\ \text{(ii)} & a^2\neq\lambda a^1 \quad \text{for any scalar } \lambda(\neq0) \end{cases}$$

$a(\alpha)\equiv\alpha a^1+(1-\alpha)a^2$ (for ${}^\forall\alpha\in(0,\ 1)$) とすると

〈(i)のケース〉

$$\begin{aligned} f[a(\alpha)]=f[(\alpha+\lambda(1-\alpha))a^1]&=[\alpha+\lambda(1-\alpha)]f(a^1) \\ &=\alpha f(a^1)+\lambda(1-\alpha)f(a^1) \\ &=\alpha f(a^1)+(1-\alpha)f(\lambda a^1) \\ &=\alpha f(a^1)+(1-\alpha)f(a^2) \end{aligned}$$

〈(ii)のケース〉

ある実数 $h(\neq0)$ を取り次の様にする事ができる．

$$f(a^1)=f(ha^2)$$

$$\begin{aligned} a(\alpha)&\equiv\alpha a^1+(1-\alpha)a^2 \\ &=\frac{(1-\alpha)+\alpha h}{h}\left[\frac{\alpha h}{(1-\alpha)+\alpha h}a^1+\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)+\alpha h}ha^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f[a(\alpha)]&=\frac{(1-\alpha)+\alpha h}{h}f(\beta a^1+(1-\beta)ha^2) \\ &>\frac{(1-\alpha)+\alpha h}{h}[\beta f(a^1)+(1-\beta)f(ha^2)] \\ &=\alpha f(a^1)+\frac{(1-\alpha)}{h}f(ha^2) \\ &=\alpha f(a^1)+(1-\alpha)f(\alpha^2) \end{aligned}$$

↗

の性質を有する。

$$f[\alpha a^1+(1-\alpha)a^2] \geqq \alpha f(a^1)+(1-\alpha)f(a^2)$$

$$\text{for } {}^{\forall}a^1,\ a^2(\neq a^1),\ {}^{\forall}\alpha\in(0,\ 1).$$

（但し等号はある実数λが存在し，$a^2=\lambda a^1$なる時，かつその時にのみ成立する。）

⟨Remark Ⅱ⟩[9)]

$f(a)$ が ⟨A. 2⟩ と同時に ⟨A. 3⟩ を満たせば $f_i(a)$ のヤコービアン行列 $J(a)$[10)] を定義する事ができ，⟨Remark Ⅰ⟩ より $J(a)$ は次の性質を満たす。

$$h'J(a)h\leqq 0 \qquad \text{for } {}^{\forall}h\in R^m \qquad h\neq 0.$$

（但し等号はある実数 t が存在し，$h=ta$ なる時かつその時にのみ成立する。）

各企業は上記の性質を満たす生産関数 $f(a)$，要素価格，w及び産出量一定 $\bar{x}$ の制約の下で費用の最小化を計っていると考えられるから，最適な要素投入量の組合せは次の問題の解になっているはずである。

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimize } \sum_{i=1}^{m} a_j w_j \ \text{ w.r.t. } (a_1, \cdots\cdots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_m) \quad (\in R_+{}^m) \\ \text{subj. to} \quad f(a)=\bar{x} \quad (\bar{x}>0) \\ \quad \text{with } w\equiv(w_1, \cdots\cdots, w_m) \text{ and } \bar{x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{as parameters} \end{array}\right\} (1)^{11)}$$

ラグランジェ関数L

$$L(a_1, \cdots\cdots, a_m\,;\lambda)\equiv\sum_{j=1}^{m}a_jw_j+\lambda[\bar{x}-f(a)]$$

を定義すれば上記の最小化問題(1)の必要条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial a_j}=w_j-\lambda f_j=0 \quad (j=1, \cdots\cdots, m) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\bar{x}-f(a)=0$$

$$\left(\text{但し，} f_j\equiv\frac{\partial f(a)}{\partial a_j}\right)$$

(2), (3)式の解 $(a^*,\ \lambda^*)>0$ は次の様に表わされる。

$$a^*{}_j=a_j(w_1, \cdots\cdots, w_m)\bar{x} \qquad (4)$$

$$\lambda=\lambda(w_1, \cdots\cdots, w_m) \qquad (5)$$

かつこれ等の関数は次の性質を満たす。

$$\left.\begin{array}{l} a_j(tw_1, \cdots\cdots, tw_m)=a_j(w_1, \cdots\cdots, w_m) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } {}^{\forall}t>0 \\ \lambda(tw_1, \cdots\cdots, tw_m)=t\lambda(w_1, \cdots\cdots, w_m) \end{array}\right\} (6)$$

⟨Remark Ⅲ⟩[12)]

最小化問題(1)の必要条件(2), (3)式の解（a^*, λ^*）は充分条件を満たす。すなわち，

$$h'J(a^*)h<0 \qquad \text{for } {}^{\forall}h\in H\equiv\{h|\textstyle\sum f_i(a^*)hi=0,\ h\in R^m \quad h\neq 0\} \qquad (7)$$

が成立する。

⟨Remark Ⅲ⟩ より

↘ （但し $\beta\equiv\dfrac{\alpha h}{(1-\alpha)+\alpha h}\in(0,1)$） q.e.d.

9) ⟨Remark Ⅰ⟩ より $f(a)$ は a に関して凹関数である．$g(t)$ を

$$g(t)\equiv f(a+th) \quad \text{for } {}^{\forall}a,\ h\in R^m\in a+th\in R_+{}^m$$

と定義すると，$g(t)$ も又 t に関して凹関数になるから

$$0\geqq\frac{d^2g(t)}{dt^2}\equiv h'J(a+th)h$$

が成立する．上式は任意の t について成立するから$t=0$で評価すると

$$h'J(a)h\leqq 0$$

となる．⟨Remark Ⅰ⟩ より，

$$h'J(a)h=0,\ \textit{iff}\ h=ta \text{ for } {}^{\exists}t(\neq 0) \text{ q.e.d.}$$

10) ヤコービアン行列 $J(a)$ は

$$J(a)\equiv\begin{pmatrix} f_{11}(a)\cdots\cdots f_{1m}(a) \\ \vdots \qquad f_{ij}(a) \qquad \vdots \\ f_{m1}(a)\cdots\cdots f_{mm}(a) \end{pmatrix} \quad f_{ij}(a)\equiv\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a_i\partial a_j}$$

で与えられる．

11) より厳密には次の様な問題にすべきであろう． ↗

↘ Minimize $\sum_{j=1}^{m} wjaj$ w.r.t. $(a_1, \cdots\cdots, a_m)(\in R_+{}^m)$

subj. to $f(a)\geqq\bar{x}$ $(\bar{x}>0)$

with $w=(w_1, \cdots\cdots, w_m)$ and $\bar{x}$ as parameters.

この時(2), (3)式に対応する必要条件は，

$$wj-\lambda fj\geqq 0,\ aj=0 \qquad \text{if } \frac{\partial L}{\partial aj}>0$$

$$\bar{x}-f(a)\leqq 0,\ \lambda=0 \qquad \text{if } \frac{\partial L}{\partial \lambda}<0$$

と表わされる．しかし脚注５）でも触れた様に我々は正なる解の存在を仮定して議論を進めているので，本文の(2), (3)式が最小化問題(1)の必要条件となる．

12) ⟨Remark Ⅲ⟩ より $h'J(a^*)h\leqq 0$ であるから，(7)式の証明の為には $ta^*\notin H$ を示せば充分である．

$ta^*\in H$ とすると，

$$0=\sum_{j=1}^{m}fi(a^*)ta_i=t\sum_{i=1}^{m}f_i(a^*)a_i=tf(a^*)=t\bar{x}>0$$

故に $ta^*\notin H$， q.e.d.

$$(-1)^l \begin{vmatrix} f_{11}\cdots\cdots f_{1l} & f_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ f_{l1}\cdots\cdots f_{ll} & f_l \\ f_1\cdots\cdots f_l & 0 \end{vmatrix} >0 \quad (l=2,\cdots,m) \tag{8}$$

が成立する。

$$\varDelta\equiv \begin{vmatrix} f_{11}\cdots\cdots f_{1m} & f_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ f_{m1}\cdots\cdots f_{mm} & f_m \\ f_1 \;\cdots\cdots\; f_m & 0 \end{vmatrix}$$

と定義すると，w_k の a^*_j に及ぼす影響は次式で示される。

$$\frac{\partial a_j}{\partial w_k}=\frac{\varDelta_{kj}}{\varDelta} \qquad (k,j=1,\cdots\cdots,m) \tag{9}$$

特に(8)式より

$$\frac{\partial a_j}{\partial w_j}=\frac{\varDelta_{jj}}{\varDelta}<0 \quad (j=1,\cdots\cdots,m) \tag{10}$$

（但し $\varDelta_{kj}$ は $\varDelta$ の (k,j) 要素の余因数である。）

B を(9)式で与えられる $\dfrac{\varDelta_{ki}}{\varDelta}\left(\equiv b_{kj}\right)$ を要素とする行列と定義すると行列Bは次の性質を有する。

〈Remark Ⅳ〉[13)]

(i) Bは対称行列かつそのランクは$n-1$

(ii) Bは半負値 (negative semi-definite) 形式である。

Ⅲ

我々はⅡ節で展開された主体的均衡条件に基づいて，要素価格の均等化を問題にするのであるが，その前に我々の分析対象となっている経済のフレームワークを明確にしておく必要がある。

〈ｉ〉 二カ国（α, β国）のみが考察対象となりその二国は要素価格 $w^k\equiv(w_1{}^k, \cdots\cdots, w_m{}^k)'$ (>0) から独立な一定の要素賦存量 $v^k\equiv(v_1{}^k, \cdots\cdots, v_m{}^k)'$ (>0) を保有し，$v^\alpha\neq v^\beta$ である。($k=\alpha, \beta$), 要素の国際移動は全く行なわれない。

〈ii〉 v^k は要素価格 w^k の調整を通して完全に利用される。

〈iii〉 各国はn種類の生産物（$n<m$）を生産し，同一財に関しては両国の生産関数は同一である。各々の生産関数はⅡ節の〈A. 1〉～〈A. 4〉を満たし，結合生産物がない[14)]。

〈iv〉 生産物の国際移動は完全に自由であり，移動を阻げる輸送費，関税等々の障害要因は存在しない[15)]。

上記のフレームワークの中では，市場均衡条件は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} p_i&=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}(w)w_j \qquad (i=1,\cdots\cdots,n) \\ v_j&=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(w)x_i \qquad (j=1,\cdots\cdots,m) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

我々は〈脚注５〉あるいは〈脚注６〉で概説した投入係数行列$A(w)$に焦点を当てる代りに次の様な最小化問題〈M. P.〉を考え，その性質を利用して分析を進めていく[16)]。

〈M. P.〉 Minimize $\sum_{j=1}^{m} v_j w_j$ w.r.t. $(w_1, \cdots\cdots, w_m)>0$

subj. to $p_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(w)w_j$

with $(p_i\,; v_j)>0$ as parameters

$(i=1,\cdots\cdots,n\,; j=1,\cdots\cdots,m)$

$$H(w_1,\cdots\cdots,w_m\,;x_1,\cdots\cdots,x_n)\equiv \sum_{j=1}^{m} v_j w_j +$$

13) Samuelson〈11〉数学附録参照．Bがフルランクでない事は容易に確かめられる．というのは異なった列の要素で加重された余因数の和は零であるという行列式の性質を使えば，

$$\sum_{j=1}^{m} b_{kj}\cdot w_j=\lambda\sum_{j=1}^{m} b_{kj}f_j=\frac{\lambda}{\varDelta}\sum_{j=1}^{m}\varDelta_{kj}f_j=0$$
$$\text{for } {}^\forall k \in \{1,\cdots\cdots,m\} \tag{n.7}$$

が成立するからである．

14) $f^{k,i}$ をk国のi番目の生産物に関する生産関数であるとすると，$f^{\alpha,i}=f^{\beta,i}=h^i$ かつ f^i はⅡ節の〈A. 1〉～〈A. 4〉を満たす．結合生産物がないという事は f^i の要素(augument) が生産要素のみからなっている事を意味する．

15) それ故各生産物に対する価格 $p\equiv(p_1,\cdots\cdots p_n)'$ (>0) は両国にとって同一である．

16) 要素の数mの方が生産物の数nよりも多いから次の最小化問題〈M. P.〉が意味をもってくるが，$n\geq m$ の場合には制約条件の数が未知数の数に等しいかそれ以上なので，〈M. P.〉は意味をもたなくなる．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left[p_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(w) w_j \right]$$

と定義すると，⟨M. P.⟩の必要条件は

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w_j} &= v_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(w) x_i = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} &= p_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(w) w_j = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)^{17)}$$

で与えられる。(11)式と(12)式とは同一の連立方程式であり，(11)式で与えられる市場均衡解（w^*, x^*）（>0）は(12)式の解，すなわち⟨M. P.⟩の必要条件を満たす。

$$c_{ij} \equiv -\frac{\partial^2 H}{\partial w_i \partial w_j}, \quad C \equiv (c_{ij}) \quad (i, j = 1, \cdots, m)$$

と定義すると

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i^* B^i(w^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p\,;v) B^i(w(p\,;v)) \equiv C(p\,;v) \qquad (13)^{18)}$$

となる。この行列 $c(p\,;v)$ は次の性質を有する。

⟨Remark V⟩[19)]

$\xi' C(p\,;v)\xi < 0$, for $^{\forall}\xi \in \{\xi | A(w^*)\xi = 0,\ \xi \in R^m,\ \xi \neq 0\}$

---

17) $$\frac{\partial H}{\partial w_k} = v_k - \sum_i a_{ik} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}}{\partial w_k} w_j$$

となるが，最後の項は零に成る．なぜなら，各産業の生関産数 f^i は ⟨A.1⟩～⟨A.4⟩ を満たすという前提から (n.7) 式が各産業について成立するからである．

18) 但し $B^i \equiv \left(\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial w_k}\right)$ $(j, k = 1, \cdots\cdots, m)$

（x^*, w^*）は(11)式（or (12)式）の解なので

$x^* = x(p;\ v)$, $w^* = w(p;\ v)$

と書き表わせる．

19) B^iは⟨Remark IV⟩の性質を満たし，$x_i^* > 0$であるから

$$\zeta' C(p;\ v)\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \xi' B^i \xi \leqq 0 \qquad \text{for } ^{\forall}\xi \in R^m \ \ \xi \neq 0$$

が成立する．⟨Remark IV⟩ 及び (n.7) 式より

$B^i\xi = 0$ iff $\xi = tw^*$

上式は各産業について成立し $A(w^*)(tw^*) \neq 0$ であるから，（もし $A(w^*)$ $(tw^*) = 0$ ならば $p = A(w^*)w^*$ より $p = 0$）

$tw^* \notin \{\xi | A(w^*)\xi = 0,\ \xi \in R^m\ \xi \neq 0\}$

$\therefore$ $\xi' C(p\,;v)\xi < 0$ for $^{\forall}\xi \in \{\xi | A(w^*) = 0\ \xi \in R^m\ \xi \neq 0\}$ q.e.d.

行列 $D(p\,;v)$ を

$$D(p;v) \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{C(p;v)xxxx}}^{m} & \overbrace{\hphantom{A'(w(p;v))}}^{n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c} C(p;v) & A'(w(p;v)) \\ \hdashline A(w(p;v)) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}m \\ \}n \end{array} \end{array}$$

と定義すると，⟨Remark V⟩ より，その逆行列 $D^{-1}(p;v)$

$$D^{-1}(p;v) = \left(\begin{array}{c:c} \hat{C}(p;v) & \hat{A}'(w(p;v)) \\ \hdashline \hat{A}(w(p;v)) & E(p;v) \end{array}\right)$$

が存在し，要素賦存量 v の変化の均衡要素価格 w^* に及ぼす影響 $\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)\Big|_{\substack{w=w^* \\ x=x^*}}$ は $\hat{C}(p;v)$ で与えられ，かつそのランクは $A(w(p;v))$ のランクを $r(\leqq n < m)$ とすれば $(m-r)$ で与えられる[20)]。故に $(p;v)$ の値に依存して決まる r 個の R^m 次元のベクターからなる行列 $U(p;v) \equiv (u^1, \cdots\cdots, u^r)$ （$m \times r$ 行列）が存在し，$\hat{C}(p;v)$ に対し

$$\hat{C}(p;v)\ U(p;v) = 0 \qquad (14)$$

とする事ができる。

α 国の均衡要素価格 $(w^\alpha)^*$ は連立方程式(11)式（or (12)式）の適当な変数及びパラメーターに国を示すスーパースクリプトを附せば，その様な連立方程式の解であるから

$$(w^\alpha)^* = w(p;v^\alpha)$$

と書きあらわせる。今 v^α が $U(p;v^\alpha)$ で張られる空間内で変化したとしよう。（$\Delta v^\alpha = U(p;v^\alpha)\xi$, for $^{\exists}\xi \in R^r$）実数 t を充分小さくとれば要素価格 $(w^\alpha)^*$ の変化量 Δw^α は,

$$\Delta w^\alpha = \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial v^\alpha}\right)\Big|_{\substack{w^\alpha = (w^\alpha)^* \\ x^\alpha = (w^\alpha)^*}} (t\Delta v^\alpha) \qquad (15)$$

で与えられる。

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial v^\alpha} = \hat{C}(p;v^\alpha)$$

$$t\Delta v^\alpha = U(p;v^\alpha)(t\xi)$$

であるから，(14), (15)式より $\Delta w^\alpha = 0$.

---

20) Samuelson ⟨11⟩ 数学附録参照.

以上の事から我々は次の定理を得る事ができる。

〈**定理**〉

Ⅲ節の〈ⅰ〉〜〈iv〉を満たす二国に於て，$\alpha(\beta)$国の要素賦存量 $v^{\alpha}(v^{\beta})$ が，(14)式で与えられる $U(p;v^{\alpha})$ （$U(p;v^{\beta})$）が張る空間[21]の中のある経路を通って $v^{\beta}(v^{\alpha})$ に到達する事ができれば二国間の要素価格 w^{α}, w^{β} は，たとえ生産要素の数が生産物の数よりも多いケースに於ても均等化する[22]。

参 考 文 献

〈1〉 Chipman, J. S., "Factor Price Equalization and the Stolper-Samuelson Theorem," *Review of Economic Studies,* vol. 10, 1969.

〈2〉 Hecksher, E., "The Effect of Foreign Trade on the Distribution of Income" in *Readings in the Theory of International Trade,* George Allen & Unwin Ltd., 1950.

〈3〉 Gale, D. & Nikaido, F., "The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings," Mathematischen Annalen 1965 reprinted in *Readings in Mathematical Economics,* vol. I, John Hopkins Press, 1968.

〈4〉 Inada, K., "The Production Coefficient Matrix and the Stolper-Samuelson Condition," *Econometrica,* vol. 39, 1971.

〈5〉 Kemp, M. C., Uekawa, Y. & Wegge, L. L. F., "P- and PN-matrices, Minkovski- and Meltzer-Matrices Generalizations of the Stolper-Samuelson and Samuelson-Rybczynski Theorems," *Journal of International Economics,* vol. 3, 1973.

〈6〉 Kuga, K., "The Factor Price Equalization Theorem," *Ecocometrica,* vol. 40, 1972

〈7〉 Nikaido, F., *Convex Structure and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

〈8〉 Ohlin, B., *Interregional and International Trade* (Revised Edition) Harvard Univ. Press, 1967.

〈9〉 Rybczynski, T. M., "Factor Endowment and Relative Commodity Prices," *Economica,* vol. 22, 1955.

〈10〉 Samuelson, P. A., & Stolper, W. F., "Protection and Real Wages," *Review of Economic Studies,* vol. 9, 1941-42.

〈11〉 Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis,* Harvard Univ. Press, 1947.

〈12〉 Samuelson, P. A., "Price of Factors and Goods in General Equilibrium," *Review of Economic Studies,* vol. 21, 1953-54.

〈13〉 Uekawa, Y., "Generalization of the Stolper-Samuelson Theorem," *Econometrica,* vol. 39, 1971.

21) すなわち $\hat{C}(p;v^{\alpha})$ の零化空間（annihilator space）である。

22) α国の要素賦存量 v^{α} の変化は当然均衡産出量 $(x^{\alpha})^{*}$ の変動をもたらすであろう．この変動は国際貿易を通じて通常はパラメーターである価格 p の変動をもたらし，ここからの $(w^{\alpha})^{*}$ への影響も考慮に入れなければならない。しかし要素価格均等化の成否の証明は生産物価格一定という前提の下で分析されるから——需要に関してはここでの分析枠組の中に入っていないが——誘発された産出量の変化に応じて各生産物に対する需要も適当に変化し，その結果生産物価格 p の不変性が保たれるものと仮定する．