《論　文》

列生成法と行生成法を用いた区分的線形費用をもつネットワーク設計問題の近似解法

片　山　直　登

1　はじめに

輸送やロジスティクスなどの分野における現実的な問題では，宅配便，混載便，貸切便といったような複数種類の輸送手段を選択することができ，処理量によって費用が最小となる輸送手段を利用することになる。そのため，費用は処理量に対して区分的線形である非線形関数として表現できる。このような問題は，区分的線形費用をもつネットワーク設計問題（Piecewise Linear Network Design Problem）とよばれる。

区分的線形費用をもつネットワーク設計問題の研究は，近年，始められたばかりであるため，従来の研究は比較的少ない。単一品種の区分的線形費用をもつ問題に対して，Kim–Pardalos［6，7］は傾斜スケーリング法，Kim–Pan–Pardalos［5］は傾斜スケーリング法とタブー探索法を組み合わせた解法を示し，Croxton–Gendron–Magnanti［2］は三種類の定式化とそれらの性質を分析している。多品種の問題に対して，Croxton–Gendron–Magnanti［3］は物流センターにおける積み替えモデルに適用し，Muriel–Munshi［1］は線形緩和解にもとづく解法を示し，Croxton–Gendron–Magnanti［4］は三種類の定式化の幾何学的な解釈と近似解法を示している。

本研究では，区分的線形費用をもつネットワーク設計問題に対して，パスフローを用いた定式化を示し，パスフローを用いた定式化に対する容量スケーリング法を提案する。

2　問題の定式化

はじめに，問題の前提条件，使用する記号と問題の定義を示す。続いて，問題に対す

る三種類の定式化，およびパスフローを用いた拡張した定式化を示す。

２．１　前提条件，記号および問題の定義

前提条件

問題の前提条件を示す。

・ノード集合が与えられている。

・アーク集合が与えられている。

・アークは向きをもつ。

・アークには，フロー量に対する区分的線形関数であるフロー費用関数が与えられている。

・区分的線形関数は，下半連続である。

・区分的線形関数における各線形関数は，固定費用と変動費用で表現される。固定費用および単位当たりの変動費用は非負である。

・複数の品種からなる品種集合が与えられている。

・各品種の需要が与えられている。

・各品種の需要は，始点から終点までのパス上を移動する。

記号の定義

記号の定義を示す。

・N：ノード集合

・A：アーク集合

・K：品種集合

・N_n^+：ノード n を始点とするアークの終点であるノード集合

・N_n^-：ノード n を終点とするアークの始点であるノード集合

・P^k：品種 k の取り得るパス集合

・$\bar{P}^k$：品種 k の取り得るパス集合の部分集合

・$\bar{P}$：$\bar{P}^k$ の k に関する和集合

・$A_{\bar{P}^k}$：$\bar{P}^k$に含まれる品種 k のパスに含まれるアーク集合

・S_{ij}：アーク（i，j）における区分集合

・c_{ij}^s：アーク（i，j）の区分 s における単位フロー量当たりの非負の変動費用

・f_{ij}^s：アーク（i，j）の区分 s における非負の固定費用

・b_{ij}^s：アーク（i，j）の区分 s の範囲の上限値，区分 s+1の範囲の下限値

・b_{ij}^{sl}：l 回目の繰り返しにおけるアーク（i，j）の区分 s に対応する容量

・d^k：品種 k の需要

・δ_{ij}^p：パス p にアーク（i，j）が $i \rightarrow j$ 向きに含まれるとき１，そうでないとき０を表す定数

・O^k：品種 k の始点

・D^k：品種 k の終点

・X_{ij}：アーク（i，j）上を移動するフロー量の合計を表す総フロー変数；非負の連続変数

・x_{ij}^k：品種 k のフローがアーク（i,j）上を移動するフロー量を表す品種フロー変数；非負の連続変数

・ξ_{ij}^s：アーク（i，j）上の区分 s の範囲内に総フロー量が存在する場合のフロー量を表す区分フロー変数；非負の連続変数

・ζ_{ij}^{ks}：アーク（i，j）上の区分 s の範囲内に区分フロー量が存在する場合の品種 k のフロー量を表す区分品種フロー変数；非負の連続変数

・z_p^k：品種 k のフローがパス p 上を移動するフロー量を表すパスフロー変数；非負の連続変数

・y_{ij}^s：アーク（i，j）の区分 s の範囲内に総フロー量が存在するとき1，そうでないとき0である区分変数；0–1変数

・π^k：品種 k に関する需要保存式に対する双対変数：連続変数

・t_{ij}^k：アーク（i，j）における品種 k に関するパスフローと品種区分フローの関係式に対する双対変数：連続変数

・u_{ij}^s：アーク（i，j）における区分 s の品種区分フローの容量制約式に対する双対変数：非負の連続変数

・w_{ij}^{ks}：アーク（i，j）における区分 s，品種 k の需要に関する強制制約式に対する双対変数：非負の連続変数

・r_{ij}：アーク（i,j）における区分変数の合計の上限を表す制約式に対する双対変数：非負の連続変数

・g_{ij}^s：アーク（i，j）における区分 s の区分変数の上限を表す制約式に対する双対変数：非負の連続変数

問題の定義

問題の定義を示す。

> ノード集合N,（$\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{f}$）で定義される区分的線形費用をもつ向きをもつアーク集合 A，品種の需要 $\boldsymbol{d}$ をもつ品種集合 K が与えられている。このとき，フロー費用の合計を最小にするフロー $\boldsymbol{\xi}$ または $\boldsymbol{\zeta}$，およびフローが存在するアークの区分 $\boldsymbol{y}$ を求めよ。

2．2　定式化

パス上のフロー量を表すパスフロー変数を用いた拡張した定式化を$PPFE$とする。$PPFE$ は，次のようになる。

（*PPFE*）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^{s}\xi_{ij}^{s}+f_{ij}^{s}y_{ij}^{s}) \tag{1}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in P^{k}} z_{p}^{k}=d^{k} \quad \forall k\in K \tag{2}$$

$$x_{ij}^{k}=\sum_{p\in P^{k}}\delta_{ij}^{p}z_{p}^{k} \quad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{3}$$

$$X_{ij}=\sum_{k\in K}x_{ij}^{k} \quad \forall(i,j)\in A \tag{4}$$

$$X_{ij}=\sum_{s\in S_{ij}}\xi_{ij}^{s} \quad \forall(i,j)\in A \tag{5}$$

$$\xi_{ij}^{s}=\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks} \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{6}$$

$$x_{ij}^{k}=\sum_{s\in S_{ij}}\zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{7}$$

$$b_{ij}^{s-1}y_{ij}^{s}\le\xi_{ij}^{s}\le b_{ij}^{s}y_{ij}^{s} \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{8}$$

$$\sum_{s\in S_{ij}}y_{ij}^{s}\le 1 \quad \forall(i,j)\in A \tag{9}$$

$$0\le\zeta_{ij}^{ks}\le d^{k}y_{ij}^{s} \quad \forall k\in K,s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{10}$$

$$z_{p}^{k}\ge 0 \quad \forall p\in P^{k},k\in K \tag{11}$$

$$y_{ij}^{s}\in\{0,1\} \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{12}$$

(1)式は目的関数であり，変動費用と固定費用の和である総費用を最小化する。第一項は変動費用，第二項は固定費用である。(2)式は，品種 k のパスフローの合計が品種 k の需要 d^k に一致することを表す需要保存式である。(3)式は，アーク上の品種 k のパスフローの合計が品種フロー量に一致することを表す。(4)式は，アーク上の品種フロー量の品種に関する合計が総フロー量に一致することを表す。(5)式は，区分フロー量の区分に関する合計が総フロー量に一致することを表す。(6)式は，区分品種フロー量の品種に関する合計が区分フロー量に一致することを表す。(7)式は，区分品種フロー量の区分に関する合計が品種フロー量に一致することを表す。(8)式は，区分変数が1であるとき，区分フロー量は区分の上限値と下限値の間の範囲に限定され，そうでないときは0となることを表す。これはアークにおける区分フローに関する強制制約式となる。(8)式には区分フローの下限に等号が含まれているが，これは $y_{ij}^{s}=0$ のとき，$\xi_{ij}^{s}=0$ とするためである。区分フローの定義から $b_{ij}^{s-1}<\xi_{ij}^{s}\le b_{ij}^{s}$（または0）であるため，区分 s の下端のフロー量（$\xi_{ij}^{s}=b_{ij}^{s-1}$）である場合は定義に反する。しかし，費用関数は下半連続であり，かつ最小化問題であるため，このような場合には最適解において区分 $s-1$ の上端のフロー量である $\xi_{ij}^{s-1}=b_{ij}^{s-1}$ を採用すればよいため，妥当な表現となる。(9)式は，各アー

クに対して区分変数の合計が0または1であることを表し，1をとる区分変数は高々1つであることを表す。⑽式は，アーク (i, j) における品種 k の需要に関する品種フローの上限値を表す強制制約式である。これは，アーク（i，j）において，S_{ij} に含まれるいずれかの区分変数が1であれば品種 k の品種フローの上限値は d^k であり，区分 s の区分変数が0であれば品種 k の品種区分フローが存在しない，すなわち，$\zeta_{ij}^{ks}=0$ であることを表す。⑾式はパスフロー変数が非負の実数であることを表し，⑿式は区分変数の0–1条件を表す。

⑶〜⑺式を用いて，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\xi}$ を整理すると，パスフロー変数を用いた拡張した定式化 $PPFE$ は次のような $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{\zeta}$ を変数とする問題 $PPFE'$ にまとめることができる。

（PPFE′）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^{s}\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}+f_{ij}^{s}y_{ij}^{s}) \tag{13}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k\in K \tag{14}$$

$$\sum_{p\in P^k}\delta_{ij}^{p}z_p^k = \sum_{s\in S_{ij}}\zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{15}$$

$$b_{ij}^{s-1}y_{ij}^{s} \le \sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks} \le b_{ij}^{s}y_{ij}^{s} \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{16}$$

$$0\le \zeta_{ij}^{ks} \le d^k y_{ij}^{s} \quad \forall k\in K, s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{17}$$

$$\sum_{s\in S_{ij}} y_{ij}^{s} \le 1 \quad \forall (i,j)\in A \tag{18}$$

$$z_p^k \ge 0 \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{19}$$

$$y_{ij}^{s}\in\{0,1\} \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{20}$$

パスフロー変数の数は膨大であるため，アークフロー変数による定式化よりもさらに大規模な組合せ最適化問題となる。しかし，実際に必要となるパスフロー変数は比較的に少ないため，必要なパスフロー変数だけを列挙する列生成法を用いると，問題を効率的に解くことができる。

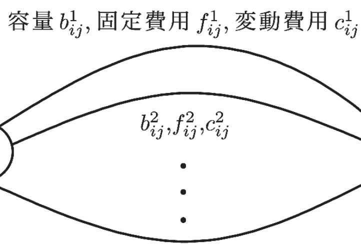

図１：多重ダミーアーク

2．3　容量制約と多重ダミーアーク

図１に示すように，*PPFE'* に対して，アークを多重アークに置き換え，⒃式を次式で置き換えた問題を*PPFED*とする。

$$0 \leq \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^{s} y_{ij}^{s} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{21}$$

*PPFED*は最小化問題であることから，この問題の最適解では，各ノード間の多重アークの中で，フロー量に対して費用が最小となるダミーアークにフローが移動することになる。一方，*PPFE* においても，最適解において，フロー量に対して費用が最小となる区分上にフローが存在する。これは，*PPFED* が *PPFE* と等価な問題となることを意味する。このように，*PAFBD* はアークが容量をもつ問題に帰着できるので，容量スケーリング法を適用することができる。

2．4　被約費用と双対問題

*PPFED*において，0–1である区分変数を０から１の連続数に緩和した線形緩和問題*PPFEL*を考える。

（*PPFEL*）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} (c_{ij}^{s} \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} + f_{ij}^{s} y_{ij}^{s}) \tag{22}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p \in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \tag{23}$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^{p} z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} \zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{24}$$

$$0 \leq \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^{s} y_{ij}^{s} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{25}$$

$$0 \leq \zeta_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^{s} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{26}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^{s} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{27}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, k \in K \tag{28}$$

$$0 \leq y_{ij}^{s} \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{29}$$

*PPFEL*におけるフロー変数 $\boldsymbol{z}$ および ζ に関する被約費用を求める。㉓，㉔式に対する双対変数を $\boldsymbol{\pi}$ ， $\boldsymbol{t}$ とし，㉕の右側の式，㉖式の右側の式に対する非負の双対変数を $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}$とし，これらを用いて， $\boldsymbol{z}$ および ζ に関する*PPFEL*に対するLagrange双対関数 *LF* を作成する。

$$
\begin{aligned}
LF = & \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}} c_{ij}^{s} \sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks} - \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} z_p^k \pi^k + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}(\sum_{p\in P^k}\delta_{ij}^{p} z_p^k - \sum_{s\in S_{ij}}\zeta_{ij}^{ks}) t_{ij}^{k} \\
& + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks} u_{ij}^{s} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks} w_{ij}^{ks} \\
= & \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}\sum_{k\in K}(c_{ij}^{s}+u_{ij}^{s}+w_{ij}^{ks}-t_{ij}^{k})\zeta_{ij}^{ks} + \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k}\Big(\sum_{(i,j)\in A}\delta_{ij}^{p} t_{ij}^{k} - \pi^k\Big) z_p^k
\end{aligned}
\tag{30}
$$

したがって，ζ に対する被約費用は

$$
c_{ij}^{s}+u_{ij}^{s}+w_{ij}^{ks}-t_{ij}^{k} \quad \forall k\in K, s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{31}
$$

となり，$\boldsymbol{z}$ に対する被約費用は

$$
\sum_{(i,j)\in A}\delta_{ij}^{p} t_{ij}^{k} - \pi^k \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{32}
$$

となる。

(27)式に対する非負の双対変数を $\boldsymbol{r}$ とし，(29)の右側の式に対する非負の双対変数を $\boldsymbol{g}$ とする。このとき，*PPFEL*の双対問題 *DU* は次のようになる。

（*DU*）

$$
\text{最大化} \quad \sum_{k\in K} d^k\pi^k - \sum_{(i,j)\in A}\Big(r_{ij} + \sum_{s\in S_{ij}} g_{ij}^{s}\Big) \tag{33}
$$

$$
\text{条件} \quad \sum_{(i,j)\in A}\delta_{ij} t_{ij}^{k} - \pi^k \ge 0 \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{34}
$$

$$
t_{ij}^{k} - u_{ij}^{s} - w_{ij}^{ks} \le c_{ij}^{k} \quad \forall k\in K, s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{35}
$$

$$
b_{ij}^{s} u_{ij}^{s} + \sum_{k\in K} d^k w_{ij}^{ks} - r_{ij} - g_{ij}^{s} \le f_{ij}^{s} \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{36}
$$

$$
u_{ij}^{s} \ge 0 \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{37}
$$

$$
w_{ij}^{ks} \ge 0 \quad \forall k\in K, s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{38}
$$

$$
r_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j)\in A \tag{39}
$$

$$
g_{ij}^{s} \ge 0 \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{40}
$$

3　容量スケーリング法

3．1　容量スケーリング

PPFED はアークが容量 $\boldsymbol{b}$ をもつ問題となるので，容量スケーリング法が適用できる。*PPFED* において，0–1変数である区分変数を 0 から 1 の連続数に緩和した線形問題 *PPFEL*を作成する。

（$PPFEL$）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^s\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}+f_{ij}^s y_{ij}^s) \tag{41}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k\in K \tag{42}$$

$$\sum_{p\in P^k}\delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s\in S_{ij}}\zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{43}$$

$$0\le\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}\le b_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{44}$$

$$0\le\zeta_{ij}^{ks}\le d^k y_{ij}^s \quad \forall k\in K, s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{45}$$

$$\sum_{s\in S_{ij}} y_{ij}^s\le 1 \quad \forall(i,j)\in A \tag{46}$$

$$z_p^k\ge 0 \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{47}$$

$$0\le y_{ij}^s\le 1 \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{48}$$

$PPFEL$の最適解における区分フローを$\tilde{\boldsymbol{\xi}}=(\tilde{\xi}_{ij}^s)=(\sum_{k\in K}\tilde{\zeta}_{ij}^{ks})$，区分変数値を$\tilde{\boldsymbol{y}}$とする。$y_{ij}^s$は本来は0または1であるが，$\tilde{y}_{ij}^s$の多くは小数値を取る可能性があるため，これらの間にギャップが存在する可能性がある。そこで，区分フローが変化しないものと想定し，アーク容量b_{ij}^sを$\tilde{\xi}_{ij}^s$に変更すれば，$\tilde{y}_{ij}^s=1$となり，このギャップを埋めることが期待できる。

実際には，容量を変更させた問題を解き直すと，フロー自体が変化してしまい，必ずしもギャップが埋まる保証はない。そこで，パラメータλを用いて，容量$\boldsymbol{b}$を徐々に変更した問題を解き直し，求められたフローが大きく変化しないように制御する。

l回目の繰り返しにおいて，アーク容量を$\boldsymbol{b}^l$とした線形緩和問題を$PPFEL_l$とする。

（$PPFEL_l$）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^s\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}+f_{ij}^s y_{ij}^s) \tag{49}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k\in K \tag{50}$$

$$\sum_{p\in P^k}\delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s\in S_{ij}}\zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{51}$$

$$0\le\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}\le b_{ij}^{sl} y_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{52}$$

$$0\le\zeta_{ij}^{ks}\le d^k y_{ij}^s \quad \forall k\in K, s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{53}$$

$$\sum_{s\in S_{ij}}\frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s} y_{ij}^s\le 1 \quad \forall(i,j)\in A \tag{54}$$

$$0\le\frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s} y_{ij}^s\le 1 \quad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{55}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, k \in K \tag{56}$$

ここで，ξ_{ij}^s は本来の容量 b_{ij}^s 以下であればよいため，(48)式の y_{ij}^s の係数を変更し，$0 \leq b_{ij}^{sl}/b_{ij}^s y_{ij}^s \leq 1$ とする。なお，この変更を(46)式にも反映し，y_{ij}^s の係数を b_{ij}^{sl}/b_{ij}^s とする。

アーク（i，j），区分 s に対応するダミーアークの l 回目の繰り返しにおけるアーク容量を $\boldsymbol{b}^l$ とおき，$\boldsymbol{b}^l$ の初期値を $\boldsymbol{b}$ とする。容量を $\boldsymbol{b}^{l-1}$ とした $PPFEL_{l-1}$ を解き直し，区分フロー $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ と区分変数 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ を求める。続いて，パラメータ λ（$0 \leq \lambda \leq 1$）を用いて，$\boldsymbol{b}^l$ を次のように更新する。

$$b_{ij}^{sl} := \lambda \tilde{\xi}_{ij}^s + (1-\lambda) b_{ij}^{sl-1} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{57}$$

λ によって，$\boldsymbol{b}^l$ の急激な変更を防ぎ，フローの大きな変化を防止する。

一方，$PPFEL_l$ では，デザイン変数の下限である(53)式の右側の式があるために，(52)式が等式で成り立つとは限らず，$b_{ij}^{sl} y_{ij}^s$ は ξ_{ij} の上限値となる。そこで，容量の変更は ξ_{ij} ではなく，ξ_{ij} の上限値である $b_{ij}^{sl} y_{ij}^s$ を用いることもできる。

$$b_{ij}^{sl} := \lambda b_{ij}^{sl-1} \tilde{y}_{ij}^s + (1-\lambda) b_{ij}^{sl-1} = \{1 - \lambda(1 - \tilde{y}_{ij}^s)\} b_{ij}^{sl-1} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{58}$$

3．2　限定主問題

$PPFEL_l$ において，取り得るパスの数は非常に多いため，あらかじめすべてのパスを列挙した問題を解くことは困難である。そこで，はじめに，適当なパスの部分集合からなる問題を作成する。このように，変数を制限した問題を限定主問題とよぶ。続いて，逐次，基底に入るべき変数を生成し，これらを問題に加えて解き直す。$PPFEL_l$ において，生成する変数は $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{\zeta}$ である。生成する変数が単体法の列に相当することから，このような方法を列生成法とよぶ。また，同時に必要な制約式を生成する。生成する制約式は単体法の行に相当することから，このような方法を行生成法とよぶ。

$PPFEL_l$ において，品種 k（$\in K$）の適当なパスの部分集合 $\bar{P}^k$ が求められているものとする。$\bar{P} = (\bar{P}^k)$ を用いると，限定主問題 $PPFELR_l(\bar{P})$ は次のように表わされる。

（$PPFELR_l(\bar{P})$）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{s \in S_{ij}} (c_{ij}^s \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} + f_{ij}^s y_{ij}^s) \tag{59}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p \in \bar{P}^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \tag{60}$$

$$\sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} \zeta_{ij}^{ks} \quad \forall (i,j) \in A_{\bar{P}^k}, k \in K \tag{61}$$

$$0 \leq \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^{sl} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{62}$$

$$0 \leq \zeta_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A_{\bar{P}^k}, k \in K \tag{63}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} \frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{64}$$

$$0 \leq \frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{65}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in \bar{P}^k, k \in K \tag{66}$$

ここで，$A_{\bar{P}^k}$ は $\bar{P}^k$ に含まれるパスが含むアークの集合である。このため，(61)式と(63)式はアーク（i，j）を通過する品種 k のパスフロー変数が生成されているときのみに存在する制約式となる。

$PPFELR_l\,(\bar{P})$ は線形計画問題であるため，パスの部分集合の要素数が比較的少なければ，汎用の数理最適化ソフトウエアを用いて比較的容易に解くことができる。

3．3　列生成法と行生成法

$PPFELR_l\,(\bar{P})$ は，変数が限定された問題である。このため，$PPFEL_l$ の最適解を求めるためには，被約費用が負である基底に入るべき変数を生成しなければならない。そこで，$PPFELR_l\,(\bar{P})$ の最適双対変数値を用いた価格付け問題を解き，被約費用が負である変数を求める必要がある。このような変数を生成し，対応するパスを $\bar{P}^k$ に加え，パスフロー変数を問題に加え，$A_{\bar{P}^k}$ を更新し，再度 $PPFELR_l\,(\bar{P})$ を解き直す。被約費用が負である変数が存在しなくなるまで，この操作を繰り返す。被約費用が負である変数が存在しなければ，$PPFEL_l$ の最適解が得られたことになる。

双対変数 $\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}$ を用いると，$\boldsymbol{z}$ に対する被約費用 $\boldsymbol{r}$，および ζ に対する被約費用 $\boldsymbol{q}$ は次のようになる。

$$r_p^k = \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p t_{ij}^k - \pi^k \quad \forall p \in P^k, k \in K \tag{67}$$

$$q_{ij}^{ks} = c_{ij}^s + u_{ij}^s + w_{ij}^{ks} - t_{ij}^k \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{68}$$

$\boldsymbol{z}$ と ζ の間には，

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} \zeta_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{69}$$

の関係がある。ある変数 z_p^k が基底に入り正の値をとると，(69)の左辺の値も正となる。そのため，いずれかの ζ_{ij}^{ks} が基底に入ることになる。そこで，被約費用が負であるパスフロー変数 z_p^k を生成する。続いて，z_p^k に対応するまだ生成されていない ζ_{ij}^{ks} を生成する。

t_{ij}^k に対応する(69)が生成されていない，すなわち(69)式に含まれる z_p^k，$\zeta_{ij}^{ks}(s \in S_{ij})$ が生成されていない場合は，t_{ij}^k の値が定義されていない。そこで，このような場合を考えて，t_{ij}^k の値を設定する。このとき，(69)の両辺の変数値が 0 で等号が成り立つと考え，t_{ij}^k

に非負の値を設定する。ここで，t は z および の両方の被約費用に含まれていることに注意する。z_p^k の被約費用に含まれる $\sum_{(i,\ j)\in A}\delta_{ij}^p t_{ij}^k$ は，アークの長さを t_{ij}^k としたときのパス $\boldsymbol{p}$ の長さであり，π^k は品種 k の始点・終点間の現在の最短距離である。このため，被約費用が負であるパスフロー変数 z_p^k の数を少なくするには，t_{ij}^k の値が大きい方が望ましい。

そこで，$\zeta_{ij}^{ks}(s\in S_{ij})$ が非基底変数である範囲内で，まだ生成されていない変数 t_{ij}^k の値が最大となるように設定する。すなわち，アーク (i, j)，品種 k において，区分 s ($\in S_{ij}$) に関する ζ_{ij}^{ks} の被約費用が最小である区分の被約費用が 0 となるように，まだ生成されていない t_{ij}^k の値を設定する。なお，関係する w_{ij}^{ks} は生成されていないため，0 と考える。このとき，t_{ij}^k は次のようになる。

$$\bar{t}_{ij}^k = \min_{s\in S_{ij}}\{c_{ij}^s + u_{ij}^s\} \quad \forall(i,j)\in A\backslash A_{\bar{P}^k}, k\in K \tag{70}$$

ここで，$A\backslash A_{\bar{P}^k}$ は品種 k のパスに含まれていないアークの集合であり，まだ生成されていない t_{ij}^k に対応する。

このとき，$c_{ij}^s + u_{ij}^s$ が最小となる区分 s に関する区分フロー変数 ζ_{ij}^{ks} の被約費用は 0 となり，それ以外の品種の区分フロー変数の被約費用は非負となる。また，$\bar{t}_{ij}^k$ は非負となる。

次に，生成されていない双対変数 $\bar{\boldsymbol{t}}$ を含めた $PPFELR_l(\bar{P})$ の双対問題 $DU_l(\bar{P})$ を示す。

($DU_l(\bar{P})$)

$$\text{最大化}\quad \sum_{k\in K} d^k\pi^k - \sum_{(i,j)\in A}\left(r_{ij} + \sum_{s\in S_{ij}} g_{ij}^s\right) \tag{71}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{(i,j)\in A_{\bar{P}^k}} \delta_{ij} t_{ij}^k + \sum_{(i,j)\in A\backslash A_{\bar{P}^k}} \delta_{ij}\bar{t}_{ij}^k - \pi^k \ge 0 \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{72}$$

$$t_{ij}^k - u_{ij}^s - w_{ij}^{ks} \le c_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A_{\bar{P}^k}, k\in K \tag{73}$$

$$\bar{t}_{ij}^k - u_{ij}^s \le c_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A\backslash A_{\bar{P}^k}, k\in K \tag{74}$$

$$\frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s}\left(b_{ij}^s u_{ij}^s - r_{ij} - g_{ij}^s\right) + \sum_{k\in K} d^k w_{ij}^{ks} \le f_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A_{\bar{P}^k} \tag{75}$$

$$\frac{b_{ij}^{sl}}{b_{ij}^s}\left(b_{ij}^s u_{ij}^s - r_{ij} - g_{ij}^s\right) \le f_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A\backslash A_{\bar{P}^k} \tag{76}$$

$$u_{ij}^s \ge 0 \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{77}$$

$$w_{ij}^{ks} \ge 0 \quad \forall k\in K, s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{78}$$

$$r_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j)\in A \tag{79}$$

$$g_{ij}^s \ge 0 \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A \tag{80}$$

$\boldsymbol{t}$ の値を $\bar{\boldsymbol{t}}$ に設定したとき，$\bar{t}_{ij}^{k}$ は同一アーク内の区分集合内で $c_{ij}^{s}+u_{ij}^{s}$ の最小値であることから，双対問題 $DU_l(\bar{P})$ の(74)式を満足する。(72)式の第二項は非負であるので，(72)式を満足する。また，$DU_l(\bar{P})$ の目的関数には $\bar{t}_{ij}^{k}$ が含まれないため，$\bar{t}_{ij}^{k}$ に設定しても，目的関数値は変化しない。このため，(70)式にしたがって，$\bar{t}_{ij}^{k}$ とした解は，$DU_l(\bar{P})$ の実行可能解であり，目的関数値も同一である。したがって，設定した $\bar{t}_{ij}^{k}$ は，$DU_l(\bar{P})$ の最適解となる。以上のことから，生成されていない(69)に対応する最適な双対変数 t_{ij}^{k} の値は，(70)式により設定できる。

一方，アークの長さを $\boldsymbol{t}$ または $\bar{\boldsymbol{t}}$ としたとき，z_p^k に関する被約費用は「パス p の長さ $-\pi^k$」となるため，$PPFELR_l(\bar{P})$ における品種 k に関する価格付け問題は，次のような問題 PRP^k となる。

(PRP^k)

$$\text{最小化} \quad \sum_{p\in P^k}\Big(\sum_{(i,j)\in A_{\bar{P}^k}}\delta_{ij}^{p}t_{ij}^{k}+\sum_{(i,j)\in A\setminus A_{\bar{P}^k}}\delta_{ij}^{p}\bar{t}_{ij}^{k}-\pi^k\Big)z_p^k \tag{81}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in P^k} z_p^k = 1 \tag{82}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k \tag{83}$$

被約費用が負となるパスフロー変数を見つけるためには，品種 k $(\in K)$ に対して最短パスを探索し，「最短距離 $-\pi^k$」が負であればよい。π^k は現在のパス集合にける品種 k の始点・終点間の最短距離であり，定数項である。このため，各品種 k に対して，(81)式の右辺の第一項と第二項の和を最小化するパス p を見つければ良い。

この問題は，次のようなアーク $(i,\ j)$ の長さを t_{ij}^{k} または $\bar{t}_{ij}^{k}$ とした品種 k に対する始点・終点間の最短路問題 SPP^k と等価となる。

(SPP^k)

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A_{\bar{P}^k}} t_{ij}^{k}\nu_{ij}^{k}+\sum_{(i,j)\in A\setminus A_{\bar{P}^k}}\bar{t}_{ij}^{k}\nu_{ij}^{k} \tag{84}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{i\in N_n^+}\nu_{in}^{k}-\sum_{j\in N_n^-}\nu_{nj}^{k}=\begin{cases}-1 & if\ n=O^k\\ 1 & if\ n=D^k\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad \forall n\in N \tag{85}$$

$$\nu_{ij}^{k}\geq 0,\ \nu_{ji}^{k}\geq 0 \quad \forall (i,j)\in A \tag{86}$$

SPP^k を解き，品種 k の始点・終点間の最短距離 μ^k を求める。$\mu^k-\pi^k<0$ であれば，この最短路に対応するパスフロー変数が生成すべき z_p^k となり，このパスを $\bar{P}^k$ に加え，$A_{\bar{P}^k}$ を更新する。$A_{\bar{P}^k}$ において，新たに要素となったアークの集合を $\Delta_{\bar{P}^k}$ とする。続いて，生成された z_p^k に関係するまだ生成されていない品種区分フロー変数 ζ_{ij}^{ks} を生成す

る。$\Delta_{\bar{P}k}$ に対応する(51)式と(53)式を追加する。

$PPFEL$ に対する列生成法と行生成法を用いた解法の流れは，次のようになる。

列生成法および行生成法

［ステップ１］品種 k（$\in K$）毎に適当な初期パス集合を求め，$\bar{P}^k$とする。初期パス集合 $\bar{P}^k$（$k\in K$）に対する $A_{\bar{P}k}$ を求める。

［ステップ２］$PPFELR_l(\bar{P})$ を解き，$\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{w}$ を求める。

［ステップ３］すべての品種 k（$\in$K）に対して，以下の操作を行う。

1．$A\backslash A_{\bar{P}k}$に含まれるアーク（i，j）について，$\bar{t}^k_{ij}$ を求める。

2．アーク（i，j）（$\in A$）の長さを $\boldsymbol{t}^k$ または $\bar{\boldsymbol{t}}^k$ とした最短路問題 SPP^k を解き，品種 k の始点・終点間の最短距離 μ^kと最短路 p^k を求める。

3．$\mu^k-\pi^k<0$ であれば，パスフロー変数 $z^k_{p^k}$ を生成し，p^k を $\bar{P}^k$ に加える。

4．$\Delta_{\bar{P}k}$ を求め，$A_{\bar{P}k}$ を更新する。

5．ζ^{ks}_{ij}($s\in S_{ij}$,（i，j）$\in\Delta_{\bar{P}k}$）を生成する。

6．$\Delta_{\bar{P}k}$ について，(51)式と(53)式を生成し，$PPFELR_l(\bar{P})$ に加える。

［ステップ４］追加されたパスがあればステップ２へ戻る。そうでなければ終了する。

容量スケーリング法では，容量を変更して繰り返し線形緩和問題を解く。このため，二回目以降では，前回までに生成したパス集合を初期集合として利用できる。

３．４　近似解法

容量 $\boldsymbol{b}^l$ を変更して，$PPFEL_l$ を繰り返し解き直す。得られた線形緩和解において，多重アークの中で複数のダミーアークのフロー量が正となる場合がある。このため，単純に線形緩和解 $\tilde{y}^s_{ij}$ が正であるダミーアークを１すると，$PPFE'$ の制約式である(16)式を満足しない場合がある。そこで，線形緩和解における総フローを$\tilde{X}_{ij}$（$=\sum_{s\in Sij}\tilde{\zeta}^{ks}_{ij}$）とし，

$$\bar{y}^s_{ij}=\begin{cases}1 & if\ b^{s-1}_{ij}<\tilde{X}_{ij}\le b^s_{ij}\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{87}$$

$\tilde{X}_{ij}$ がどの区分の範囲にあるかによって，y^s_{ij} を設定する。$\tilde{X}_{ij}$ が上限 b^s_{ij} と下限 b^{s-1}_{ij} の範囲にある区分に対応する区分変数を１，それ以外を０とした区分変数を $\bar{y}^s_{ij}$ とする。

このとき，$\bar{\boldsymbol{y}}$ は(16)式と(18)式を満足する

次に，区分変数を $\bar{\boldsymbol{y}}$ としたネットワーク上で，次のような上下限つきの多品種フロー問題 $MCFLU(\bar{\boldsymbol{y}})$ を作成する。

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^s\xi_{ij}^s+f_{ij}^s\bar{y}_{ij}^s) \tag{88}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{(i,j)\in N_n^+}x_{ij}^k-\sum_{(i,j)\in N_n^-}x_{ij}^k=\begin{cases}-d^k & if\ n=O^k\\ d^k & if\ n=D^k\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad \forall n\in N,\ k\in K \tag{89}$$

$$X_{ij}=\sum_{k\in K}x_{ij}^k \qquad \forall(i,j)\in A \tag{90}$$

$$X_{ij}=\sum_{s\in S_{ij}}\xi_{ij}^s \qquad \forall(i,j)\in A \tag{91}$$

$$\begin{cases}b_{ij}^{s-1}<\xi_{ij}^s\le b_{ij}^s & if\ \bar{y}_{ij}^s=1\\ \xi_{ij}^s=0 & if\ \bar{y}_{ij}^s=0\end{cases} \qquad \forall s\in S_{ij},(i,j)\in A \tag{92}$$

$$x_{ij}^k\ge 0 \qquad \forall k\in K,(i,j)\in A \tag{93}$$

（$MCFLU\,(\bar{\boldsymbol{y}})$）

$MCFLU\,(\bar{\boldsymbol{y}})$ はアークフロー変数による定式化ではあるが，多品種フロー問題であるため，汎用の数理最適化ソフトウエアを用いて解くことができる。アークフローによる定式化を用いるのは，パスフローの定式化では，すべてのパスが生成されていないためである。$MCFLU\,(\bar{\boldsymbol{y}})$ の実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を求めることができれば，$\bar{\boldsymbol{y}}$ および $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は $PPFE$ の実行可能解となる。

汎用の数理最適化ソフトウエアの分枝限定法を用いると，少数の0–1 変数をもつ計画問題に対しては比較的短時間で最適解を求めることができるが，$PPFE'$ は $|A||S|$ 個の 0–1変数をもつため，直接解くことは困難である。一方，容量スケーリング法では，繰り返し回数とともに，多くの 0–1変数である区分変数が 0 または 1 に収束する傾向がある。そこで，$PPFEL_l$ の区分変数解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ とし，繰り返し回数 l において， 0 または 1 に収束していない区分変数の数 ω_l が決められた数 ψ 以下となれば，次のような区分変数の範囲を限定した条件を付加した問題 $PPFER_l$（$\bar{P}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}$）を作成する。

$$\sum_{s\in S_{ij}}y_{ij}^s=0 \quad if \sum_{s\in S_{ij}}\tilde{y}_{ij}^s<\epsilon_0 \qquad (i,j)\in A \tag{94}$$

ここで，ϵ_0 は $0<\epsilon_0<1$ である定数である。

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}}(c_{ij}^s\sum_{k\in K}\zeta_{ij}^{ks}+f_{ij}^s y_{ij}^s) \tag{95}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in\bar{P}^k}z_p^k=d^k \qquad \forall k\in K \tag{96}$$

$$\sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} \zeta_{ij}^{ks} \quad \forall (i,j) \in A_{\bar{P}^k}, k \in K \tag{97}$$

$$0 \leq \sum_{k \in K} \zeta_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^{sl} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{98}$$

$$0 \leq \zeta_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A_{\bar{P}^k}, k \in K \tag{99}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{100}$$

$$\begin{cases} \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s = 0 & if \ \sum_{s \in S_{ij}} \tilde{y}_{ij}^s \leq \epsilon_0 \\ \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 & otherwise \end{cases} \quad (i,j) \in A \tag{101}$$

$$0 \leq y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A \tag{102}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in \bar{P}^k, k \in K \tag{103}$$

$PPFER_l\,(\bar{P}, \tilde{\mathbf{y}})$ は，次のようになる。

$PPFER_l\,(\bar{P}, \tilde{\mathbf{y}})$）

$PPFER_l\,(\bar{P}, \tilde{y})$ に，分枝限定法を適用すれば, $PPFE$ の近似解を求めることができる。しかし，$PPFER_l\,(\bar{P},\ \tilde{y})$ のように 0–1変数を限定した問題であっても，分枝限定法によって最適解を求めることが困難な場合がある。そのため，実際の計算では，分枝限定法は一定時間で打ち切り，その時点で得られた最良の上界値を採用する。また，ψ を一定値とした場合，連続した繰り返し回数において分枝限定法を繰り返し同一の解を生成することが多くなるため，これを防ぐために分枝限定法を適用する毎に ψ を β だけ減少させ，解の多様性を確保する。

次に $PPFE$ に対する近似解法を含めた容量スケーリング法を示す。

容量スケーリング法

［ステップ 1］ スケーリングパラメータを λ，繰り返し回数の上限を l_{max}，閾値を ϵ_0，ϵ_1，および ϵ_2，最良の上界値を UB，分枝限定法の適用基準を ψ，その変更量を β とする。$\boldsymbol{b}^l := \boldsymbol{b}$，$UB := 1$，$l := 0$ とする。

［ステップ 2］ $l := l+1$ とする。列生成法と行生成法を用いて $PPFEL_l$ を解き，最適解 $\tilde{y}$ を求める。

［ステップ 3］ $\boldsymbol{b}^l := \lambda\, \boldsymbol{b}^{l-1} \tilde{\boldsymbol{y}} + (1-\lambda)\, \boldsymbol{b}^{l-1}$ または $\boldsymbol{b}^l := \{1-\lambda\,(1-\tilde{\boldsymbol{y}})\}\, \boldsymbol{b}^{l-1}$ とする。

［ステップ 4］ $\bar{\boldsymbol{y}}$ を求め，$MCFLU\,(\bar{\boldsymbol{y}})$ を解き，上界値 UB_l を求める。$UB_l \leq UB$ であれば，$UB := UB_l$ とする。

［ステップ 5］ $\epsilon_1 < \tilde{y}_{ij}^s < \epsilon_2\ ((i,\ j) \in A)$ である区分変数の数 ω_l を求める。$\omega_l \leq \psi$ であれば，ϵ_0 を用いて $PPFER_l\,(\bar{P},\ \tilde{\boldsymbol{y}})$ を作成し，分枝限定法を適用し，上界値 UB_R を求める。$UB_R \leq UB$ であれば，$UB := UB_R$ とし，$\psi := \psi -$

βとする。
［ステップ６］$l=l_{max}$であれば終了，そうでなければステップ２へ戻る。

4　おわりに

本研究では，区分的線形費用をもつネットワーク設計問題を対象として，容量スケーリング法を用いた近似解法を提案した。容量スケーリング法における容量の変更方法，線形緩和問題の限定主問題を示し，未生成の制約式に対する双対変数値の設定法を示し，限定主問題における価格付け問題が最短路問題となることを示した。また，行生成法と列生成法を示した。さらに，容量スケーリング法による解をもとにした分枝限定法を示し，近似解法を含む容量スケーリング法を示した。

しかし，パスフローを用いた定式化に対する容量スケーリング法を用いた解法を提案したが，数値実験は行っていない。そのため，パスフローを用いた定式化に対する容量スケーリング法のプログラムを開発し，数値実験を行うことが必要である。

参考文献

[1] A. Muriel and F. N. Munshi. Capacitated multicommodity network flows with piecewise linear concave costs. *IIE Transactions*, Vol. 36, pp. 683–696, 2004.

[2] K. L. Croxton, B. Gendron, and T. L. Magnanti. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science*, Vol. 49, pp. 1268–1273, 2003.

[3] K. L. Croxton, B. Gendron, and T. L. Magnanti. Models and methods for merge-intransit operations. *Transportation Science*, Vol. 37, pp. 1–22, 2003.

[4] K. L. Croxton, B. Gendron, and T. L. Magnanti. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research*, Vol. 55, pp. 146–157, 2007.

[5] D. Kim, X. Pan, and P. M. Pardalos. An enhanced dynamic slope scaling procedure with tabu scheme for fixed charge network flow problems. *Computational Economics*, Vol. 27, pp. 273–293, 2006.

[6] D. Kim and P. M. Pardalos. A dynamic domain contraction algorithm for nonconvex piecewise linear network flow problems. *journal of Global Optimization*, Vol. 17, pp. 225–234, 2000.

[7] D. Kim and P. M. Pardalos. Dynamic slope scaling and trust interval techniques for solving concave piecewise linear network flow problems. *Networks*, Vol. 35, pp. 216–222, 2000.