《論　文》

アセットバランスを考慮したサービスネットワーク設計問題

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワーク設計問題は，輸送，ロジスティクス，通信や生産システムなどに幅広い応用分野をもつネットワークの構造を設計する問題である．この設計問題では，ネットワーク上の施設・設備であるアークにかかる固定的な費用とものの移動にかかる変動的な費用を考慮して，施設・設備などに対応するアークやノードを適切に選択することによりネットワークを形成し，かつ異なる始点と終点をもつ複数の荷物，商品やデータなどの移動経路であるパスを決めることになる．

ネットワーク設計問題に関しては，Magnanti–Wong（1984）[22]，Minoux（1989）[23]，Balakrishnan–Magnanti–Mirchandani（1997）[7]，Gendron–Crainic–Frangioni（1997）[14]，片山（2002，2008，2012）[16, 17, 18]，Crainic（2003）[11]，Costa（2005）[10] などが詳しい調査や解説を行っている．

サービスネットワーク設計問題は，輸配送車の選択，輸配送スケジューリングや荷物の輸配送経路の決定など輸配送ネットワークにおけるサービスの計画やスケジューリングに関連した設計問題である．ネットワーク上のアークは配送車や乗務員などの資源であるアセットを表しており，これらのアセットの時間的・位置的な適切な配置とそのバランスを図ることが必要となる．特に，アセットの配置とバランスに焦点をおいたサービスネットワーク設計問題をアセットバランスを考慮したサービスネットワーク設計問題（Asset-Balanced Service Network Design Problem : *ABSND*）とよぶ．この設計問題は，多品種のモノが移動するネットワークにおいて，アーク上の資源であるアセットの容量制約をもち，かつアセットの配置がバランスを保ちながら，全体の費用が最小となるようなネットワークの形状とモノが移動するパス，およびアセットの配置を求める問題である．アセットに関する固定費用であるアセット費用は対応するサービスを行う

際に生じる固定的な費用，変動費用は対応するサービスで処理量に関係して生じる変動費用である．サービスネットワーク設計問題は短期的な運用レベルから中期的な戦術レベルの計画問題となる．

サービスネットワーク設計問題に関しては，Crainic（2000, 2003）[12, 11]，Crainic–Kim（2007）[13] などが詳しい解説を行っている．Armacost–Barnhart–Ware（2002）[4]，Smilowitz–Atamtúrk–Daganzo（2003）[25] およびLai–Lo（2004）[19] は，航空機や船舶などの特定のアセットの所有や運用を対象とした解析を行っている．Crainic–Kim（2007）[13] およびBektas–Crainic（2007）[8] は，アセットの有効活用戦略とよぶ運用レベルの計画問題を扱っている．Teypaz–Schrenk–Cung（2010）[26] は，問題をネットワーク構築，貨物割当，経路計画に分割する解法を示している．Lulli–Pietropaoli–Ricciardi（2011）[21] はイタリアの鉄道貨物を想定した事例分析を行っている．また，Lium–Crainic–Wallace（2009）[20] およびHoff–Lium–Løkketangen–Crainic（2010）[15] は，確率的なサービスネットワーク設計問題を扱っている．

一方，Pedersen–Crainic–Madsen（2009）[24] は，アセットバランスを考慮したサービスネットワーク設計モデルを提示している．この設計問題は，容量制約をもつ多品種のネットワーク設計問題にアセットバランス制約を付加した問題である．この設計問題に対して，Andersen–Crainic–Christiansen（2009a）[3] は複数のアセットモデルを示し，シナリオ解析を行っている．Andersen–Crainic–Christiansen（2009b）[2] は，アーク－パスによる定式化，サイクル－パスによる定式化とパス生成法，サイクル生成法を示しており，Andersen–Christiansen–Crainic–Grønhaug（2011）[1] はサイクル－パスによる定式化に対する分枝価格法を示している．また，Pedersen–Crainic–Madsen（2009）はタブー探索法による近似解法，Chouman–Crainic（2011）[9] は数理計画ソルバーとタブー探索法を組み合せた近似解法を示している．また，Bai–Kendal–Li（2010）[5] はガイド付き局所探索法，Bai–Kendal–Atkin（2012）[6] はタブー補助ガイド付き局所探索法を示している．

本研究では，Pedersen–Crainic–Madsen（2009）が提示したアセットバランスを考慮したサービスネットワーク設計問題を対象とする．この設計問題は容量制約をもつネットワーク設計問題の特殊形であり，NP 完全な問題となる．本研究では，この設計問題に対して容量スケーリング法と局所探索法を組合せた近似解法を提案する．

2　問題の定式化

2．1　アークフローによる定式化

ノード集合を N，向きをもつアーク集合を A とし，このネットワーク上で移動する品種集合を K とする．アーク (i, j) 上においてアセットを選択したときに発生する固

定費用である非負のアセット費用を f_{ij}，アーク上を移動する品種 k の量に比例して発生する非負の単位当たりのフロー費用を c_{ij}^k とし，アーク（i, j）上のアセット容量を C_{ij} とする．品種 k の始点を O^k，終点を D^k とし，品種 k の需要を d^k とする．また，アーク（i, j）上を移動する品種 k のフロー量を表す非負の連続変数であるアークフロー変数を x_{ij}^k とし，アーク（i, j）上のアセットを選択するとき 1，そうでないとき 0 である 0-1 離散変数であるアセットデザイン変数を y_{ij} とする．

このとき，*ABSND* のアークフローによる定式化 *ABSNDA* は，次のようになる．

（*ABSNDA*）

最小化
$$\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

条件
$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = \begin{cases} -d^k & if\ n = O^k \\ d^k & if\ n = D^k \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n \in N,\ k \in K \tag{2}$$

$$\sum_{i\in N_n^+} y_{in} - \sum_{j\in N_n^-} y_{nj} = 0 \quad \forall n \in N \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \le C_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{4}$$

$$x_{ij}^k \le d^k y_{ij} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{5}$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{6}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \tag{7}$$

⑴式は目的関数であり，フロー費用とアセット費用の総和を最小化する．⑵式はアークフロー保存式である．この式は，ノードに流入するフローと流出するフローの差が，品種 k の始点であれば $-d^k$，終点であれば d^k，その他のノードであれば 0 であることを表す．この式は，各品種について，必ず始点から終点まで需要が移動することを保証する．⑶式はアセットバランス式であり，ノードに流入するアセット数の合計と流出するアセット数の合計が一致することを表す．⑷式は，アセット容量制約式である．この式は，アーク（i, j）上のアセットが選択されるときはアーク上を移動するフロー量の合計はアセット容量以下であり，アセットが選択されないときは 0 であることを表す．⑸式は，アーク上の品種とその需要に関する強制制約である．この式は，アーク（i, j）上のアセットが選択されるときはアーク上を移動する品種 k のフロー量の合計は品種 k の需要以下であり，アセットが選択されないときは 0 であることを表す．⑹式は

アークフロー変数の非負条件，(7)式はアセットデザイン変数の 0–1 条件である．

2．2　パスフローによる定式化

パス p 上を移動する品種 k のフロー量を表す非負の連続変数であるパスフロー変数を z_p^kとし，パス p にアーク（i, j）が含まれるとき 1，そうでないとき 0 を表す定数を δ_{ij}^p とする．また，品種 k の取りうるパスの集合を P^kとする。

このとき，*ABSND* のパスフローによる定式化 *ABSNDP* は，次のようになる．

（*ABSNDP*）

$$\text{最小化}\quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k \sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{8}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{p\in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k\in K \tag{9}$$

$$\sum_{i\in N_n^+} y_{in} - \sum_{j\in N_n^-} y_{nj} = 0 \quad \forall n\in N \tag{10}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k \le C_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A \tag{11}$$

$$\sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k \le d^k y_{ij} \quad \forall k\in K, (i,j)\in A \tag{12}$$

$$z_p^k \ge 0 \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{13}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A \tag{14}$$

(8)式は目的関数であり，フロー費用とアセット費用の総和を最小化する．ここで，$\sum_{p\in P^k}\delta_{ij}^p z_p^k$ は x_{ij}^k に一致する．(9)式は，品種 k のパスフローの合計が品種 k の需要 d^k に一致することを表すパスフロー保存式である．(10)式はアセットバランス式であり，ノードに流入するアセット数の合計と流出するアセット数の合計が一致することを表す．(11)式はアセット容量制約式である．(12)式は，アーク（i, j）における品種 k の需要 d^k に関する強制制約式である．(13)式はパスフロー変数の非負制約であり，(14)式はアセットデザイン変数の 0–1 条件である．

2．3　パスフロー変数の被約費用

パスフローによる定式化 *ABSNDP* において，パスフロー変数 $\boldsymbol{z}$ に対する被約費用を求める．(9)式に対する双対変数 $\boldsymbol{\pi}$ ，(11)および(12)式に対する非負の双対変数 $\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{w}$ を用

いて，$\boldsymbol{z}$ に関する Lagrange 双対関数 $LF(\boldsymbol{z})$ を作成する．

$$
\begin{aligned}
LF(\boldsymbol{z}) = & \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k \sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k - \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} z_p^k \pi^k \\
& + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k u_{ij} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k w_{ij}^k \\
= & \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k}\Big\{\sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p (c_{ij}^k + u_{ij} + w_{ij}^k) - \pi^k\Big\} z_p^k
\end{aligned}
\tag{15}
$$

したがって，パスフロー変数 $\boldsymbol{z}$ に関する被約費用は次のようになる．

$$
\sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p (c_{ij}^k + u_{ij} + w_{ij}^k) - \pi^k \qquad \forall p \in P^k, k \in K \tag{16}
$$

⒃式の第一項はアークの長さを $c_{ij}^k + u_{ij} + w_{ij}^k$ としたパス p の長さであり，π^k は品種 k の始点・終点間の最短距離に相当する．

3　近似解法

アセットバランス式である⑶式や⑽式を考慮しない場合，この問題は容量制約をもつネットワーク設計問題に一致する．そこで，容量制約をもつネットワーク設計問題に対する近似解法である容量スケーリング法と局所分枝法を適用する．

3．1　容量スケーリング法

なんらかの手段を用いて，*ABSNDP* の最適なフロー量を求めることができれば，アセット容量をこれらの量に変更しても，*ABSNDP* の最適値は変わらない．さらに，このようにアセット容量を変更した問題の線形緩和問題を考える．この線形緩和問題においても，最適なフロー量は実行可能解となる．緩和問題においてアセット容量を最適なフロー量に近づけると，アセットデザイン変数が 1 に近くなることが期待できる．ただし，最適なフロー量が 0 である場合，アセットデザイン変数は 0 と考える．しかし，最適なフロー量を求めること自体が問題の目的であるため，実際にはこれらの値を直接求めることはできない．また，アセット容量を変化させるとフロー量も変化する．

そこで，逆に，線形緩和問題において，フロー量に近づくように，少しずつアセット容量を変更しながら問題を解き直すことを繰り返す．このようにすると，アセット容量とフロー量が徐々に近づくため，アセットデザイン変数が 0 または 1 に近づくことが期待できる．容量スケーリング法は，このように線形緩和問題の解をもとに，容量を変更して繰り返し線形緩和問題を解き，0–1 変数解を導く近似解法である．

すべてが 0 または 1 であるアセットデザイン解を求められた場合，このアセットデザ

イン解をもとにフロー問題を解き，アークフローをおよび上界値を求めることができる．そうでない場合は，適当な方法を用いて，0または1でないアセットデザイン解を0または1に設定して，実行可能解を求めることが必要となる．

ABSNDP において，アセットデザイン変数の0-1条件を0から1の連続数に緩和した線形緩和問題 *ABSNDPL* を考える．*ABSNDPL* において，繰り返し毎にアセット容量を変化させる．繰り返し回数 l のときのアーク（i, j）上のアセット容量を C_{ij}^{l} とする．

パラメータ λ（$0<\lambda<1$），アーク（i, j）上の現在の総フロー量 $\tilde{X}_{ij}$ および $l-1$ 回目のアーク（i, j）のアセット容量 C_{ij}^{l-1} を用いて，l 回目のアセット容量を次のように更新する．

$$C_{ij}^{l} := \lambda \tilde{X}_{ij} + (1-\lambda) C_{ij}^{l-1} \quad \forall (i,j) \in A \tag{17}$$

ここで，*ABSNDPL* のパスフロー量を $\tilde{\boldsymbol{z}}$ とすると，$\tilde{X}_{ij}$ は次式となる。

$$\tilde{X}_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^{p} \tilde{z}_p^k \quad \forall (i,j) \in A \tag{18}$$

一方，⑿式があるために，最適解において必ずしも $\tilde{y}_{ij}=\tilde{X}_{ij}/C_{ij}^{l}$ が成り立たず，$C^{l}{}_{ij}\tilde{y}_{ij} \geq \tilde{X}_{ij}$ となり，$C^{l}{}_{ij}\tilde{y}_{ij}$ は $\tilde{X}_{ij}$ の上限値となる．そこで，アーク（i, j）上の現在のアセットデザイン変数 $\tilde{y}_{ij}$ を用いて，l 回目のアセット容量を次のように更新することもできる．

$$C_{ij}^{l} := \lambda C_{ij}^{l-1} \tilde{y}_{ij} + (1-\lambda) C_{ij}^{l-1} = \{1 - \lambda(1-\tilde{y}_{ij})\} C_{ij}^{l-1} \quad \forall (i,j) \in A \tag{19}$$

ABSNDPL の l 回目の繰り返しにおける問題 $ABSNDPL_l$ は，次のようになる．

（$ABSNDPL_l$）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij}^{k} \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^{p} z_p^k + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \tag{20}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p \in \bar{P}^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \tag{21}$$

$$\sum_{i \in N_n^+} y_{in} - \sum_{j \in N_n^-} y_{nj} = 0 \quad \forall n \in N \tag{22}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^{p} z_p^k \leq C_{ij}^{l} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{23}$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k \leq d^k y_{ij} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{24}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad p \in P^k, k \in K \tag{25}$$

$$0 \leq y_{ij} \leq \frac{C_{ij}}{C_{ij}^l} \quad \forall (i,j) \in A \tag{26}$$

ここでは，アセットデザイン変数の上限値である 1 を変更し，$y_{ij}^s \leq C_{ij}/C_{ij}^l$ に変更している．

3．2　限定主問題

$ABSNDPL_l$ には非常に多くのパスフロー変数が含まれるため，直接解くことは困難である．そこで，あらかじめすべてのパスフロー変数を含む問題を対象とするのではなく，逐次，必要なパスフロー変数を生成し，問題に追加していく．生成するパスフロー変数が単体法の列に相当することから，このような方法を列生成法とよぶ．

一方，$ABSNDPL_l$ には，非常に多くの強制制約式である(24)式が含まれている．しかし，列生成により生成されたパスフロー変数が含まれる強制制約式はそれほど多くなく，生成されたパスフロー変数が左辺に含まれていない強制制約式は不要なものとなる．そこで，生成したパスフロー変数が初めて左辺に含まれる強制制約式を逐次生成し，問題に追加する．生成する制約式が単体法の行に相当することから，このような方法を行生成法とよぶ．なお，適時，線形緩和解を除外するような有効な強制制約式のみを加えることも可能であり，このような方法を切除平面法をよぶ．

品種 k の適当なパスの部分集合 $\bar{P} = (\bar{P}^k)$ が求められているものとする．このとき，パス集合が $\bar{P}$ に制限されている次のような限定主問題 $ABSNDPLR_l(\bar{P})$ を考える．

（$ABSNDPLR_l(\bar{P})$）

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij}^k \sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \tag{27}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p \in \bar{P}^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \tag{28}$$

$$\sum_{i \in N_n^+} y_{in} - \sum_{j \in N_n^-} y_{nj} = 0 \quad \forall n \in N \tag{29}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{p\in \bar{P}^k}\delta_{ij}^p z_p^k \le C_{ij}^l y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A \tag{30}$$

$$\sum_{p\in \bar{P}^k}\delta_{ij}^p z_p^k \le d^k y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A_{\bar{P}^k}, k\in K \tag{31}$$

$$z_p^k \ge 0 \quad p\in \bar{P}^k, k\in K \tag{32}$$

$$0\le y_{ij}\le \frac{C_{ij}}{C_{ij}^l} \quad \forall (i,j)\in A \tag{33}$$

$A_{\bar{P}^k}$ は品種 k のパス集合 $\bar{P}^k$ に含まれるアーク集合であり，(31)式はアーク（$i,\ j$）を通る品種 k のパスフロー変数が生成されているときのみ存在する強制制約式となる．

この問題は線形計画問題であるため，パスの部分集合 $\bar{P}$ の要素数が少なければ，汎用の数理計画ソルバーを用いて解くことができる．

3．3　列生成法と列生成法

$ABSNDPLR_l(\bar{P})$ はパスフロー変数が限定された問題であるため，最適解を求めるためには，逐次，基底に入るであろう新たなパスフロー変数を生成しなければならない．そのために，価格付け問題とよばれる問題を解き，被約費用が負であるパスフロー変数を求める．パスフロー変数とそれに対応するパスを $\bar{P}^k$ に加え，再度$ABSNDPLR_l(\bar{P})$ を解き直す．この操作を被約費用が負である変数がなくなるまで繰り返す．被約費用が負である変数がなければ，$ABSNDPL_l$の最適解が得られたことになる．

(21)式に対する双対変数を $\boldsymbol{\pi}$，(23)，(24)式に対する非負の双対変数を $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}$ とする．これらの値は，$ABSNDPLR_l(\bar{P})$ を最適に解くことにより求めることができる．

パスフロー変数 $\boldsymbol{z}$ に関する被約費用は，

$$\sum_{(i,j)\in A}\delta_{ij}^p(c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k)-\pi^k \quad \forall p\in P^k, k\in K \tag{34}$$

である．$\sum_{(i,j)\in A}\delta_{ij}^p$（$c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k$）は，アーク（$i,\ j$）の長さを $c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k$ としたとき，パス p の長さとなる．また，π^k は現在のパス集合 $\bar{P}^k$ における品種 k の最短距離である．被約費用は「パス p の長さ－ 現在の最短距離」であるので，被約費用が負である変数を見つけることは現在の最短距離よりも短いパスを見つけることになる．

π^k は定数項として扱えるので，負のパスフロー変数を見つけるには，品種 k に対して，(34)式の第一項を最小化するパス p を見つければ良い．したがって，$ABSNDPLR_l(\bar{P})$における品種 k に関する価格付け問題は，次のような問題 PRP^k に帰着される．

(PRP^k)

$$\text{最小化}\quad \sum_{p\in P^k}\Bigl\{\sum_{(i,j)\in A_{\bar{P}^k}}\delta_{ij}^p(c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k)+\sum_{(i,j)\in A\setminus A_{\bar{P}^k}}\delta_{ij}^p(c_{ij}^k+u_{ij})-\pi^k\Bigr\}z_p^k \tag{35}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{p\in P^k} z_p^k=1 \tag{36}$$

$$z_p^k\geq 0 \quad \forall p\in P^k \tag{37}$$

ここで，品種 k の需要に関する強制制約式である(31)式が生成されていない，すなわち $A_{\bar{P}^k}$ に含まれない制約式に対する w_{ij}^k は 0 とし，(35)式には含めていない．

π^k は定数であるので，PRP^k は次のようなアーク (i, j) の長さを $c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k$ または $c_{ij}^k+u_{ij}$ とした品種 k に対する始点・終点間の最短路問題 SPP^k に帰着される．

(SPP^k)

$$\text{最小化}\quad \sum_{(i,j)\in A_{\bar{P}^k}}(c_{ij}^k+u_{ij}+w_{ij}^k)\nu_{ij}^k+\sum_{(i,j)\in A\setminus A_{\bar{P}^k}}(c_{ij}^k+u_{ij})\nu_{ij}^k \tag{38}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{i\in N_n^+}\nu_{in}^k-\sum_{j\in N_n^-}\nu_{nj}^k=\begin{cases}-1 & if\ n=O^k\\ 1 & if\ n=D^k\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad \forall n\in N \tag{39}$$

$$\nu_{ij}^k\geq 0 \quad \forall(i,j)\in A \tag{40}$$

品種 k について $\nu_{ij}^k=1$ であるアークの集合が最短パス p^k となる．$\mu^k-\pi^k<0$ であれば，品種 k における被約費用が負であるパスフロー変数が見つかったことになり，p^k が生成すべきパス，パスに対応するパスフロー変数 $z_{p^k}^k$ が生成すべき変数となる．また，すべての品種 k について $\mu^k-\pi^k\geq 0$ であれば，被約費用が負である変数が存在しないため，$ABSNDPL_l$ が最適に解けたことになる．

生成した p^k 上のアークに関して，新たに $A_{\bar{P}^k}$ の要素となったアーク集合を $\Delta_{\bar{P}^k}$ とする．$\Delta_{\bar{P}^k}$ に含まれるアークについて，品種 k の需要に関する強制制約式である(24)式を問題に追加する．

列生成法と行生成法

［ステップ 1］品種 $k\,(\in K)$ 毎に適当な初期パス集合 $\bar{P}^k$ を求め，$\bar{P}:=(\bar{P}^k)$ とする．初期パス集合 $\bar{P}^k(k\in K)$ に含まれるパス p 上のアーク (i, j) の集合を $A_{\bar{P}^k}$ とする．

［ステップ 2］$ABSNDPLR_l(\bar{P})$ を解き，最適双対解 $\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}$ を求める．

［ステップ 3］すべての品種 $k\,(\in K)$ に対して，以下の操作を行う．

- アーク（i, j）（$\in A$）の長さを $c_{ij}^k + u_{ij} + w_{ij}^k$ または $c_{ij}^k + u_{ij}$ とした最短路問題 SPP^k を解き，品種 k の始点・終点間の最短パス p^k，最短距離 μ^k を求める．
- $\mu^k - \pi^k < 0$ であれば，最短パス p^k を $\bar{P}^k$ に加え，パスフロー変数 $z_{p^k}^k$ を生成する．$\Delta_{\bar{P}^k}$ を求める．
- $A_{\bar{P}^k}$ に $\Delta_{\bar{P}^k}$ を加える．
- $\Delta_{\bar{P}^k}$ に含まれるアークに対応する強制制約式を生成し，制約式として追加する．

［ステップ４］追加されたパスがあればステップ２へ戻る．そうでなければ終了する．

容量スケーリング法では，容量を変更して繰り返し線形緩和問題を解く．このため，二回目以降では，前回までに生成したパス集合を初期集合として利用できる．

３．４　一部の 0-1 変数を固定した分枝限定法

アセット容量を変更して，$ABSNDPL_l$ を繰り返し解き直す．$ABSNDPL_l$ から得られるアセットデザイン解は線形緩和解であるため 0 または 1 とは限らないが，容量スケーリング法の繰り返し回数とともに多くのアセットデザイン変数が 0 または 1 に収束する傾向がある．一方，汎用の数理計画ソルバーの分枝限定法を用いると，少数の 0–1 変数をもつ計画問題に対しては比較的短時間で最適解を求めることができる．しかし，$ABSNDP$ は $|A|$ 個の 0–1 変数をもつため，直接解くことは困難である．そこで，容量スケーリング法において 0 または 1 に収束していないアセットデザイン変数の数がある決められた数以下となった繰り返し回数において，分枝限定法を適用すれば，比較的に短時間で近似解を求めることができる．

$ABSNDPL_l$ から得られるデザイン解と適当な閾値を用いて，アセットデザイン変数を 0 に固定，1 に固定，および固定しない自由変数に分類する．二つの閾値を ϵ_1 と ϵ_2（$0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$）とする．$ABSNDPL_l$ から得られるアセットデザイン変数解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ とし，ϵ_1 と ϵ_2 を用いて，$\boldsymbol{y}$ を次のように一部を固定する．

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & if\ \tilde{y}_{ij} \le \epsilon_1 \\ 1 & if\ \tilde{y}_{ij} \ge \epsilon_2 \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{41}$$

$\epsilon_1 < y_{ij} < \epsilon_2$ である 0–1 に固定されていないアセットデザイン変数が決められた数以下となれば，次のようなアセットデザイン変数とパスが限定された問題 RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}, \bar{P}$）を解く．

（RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\bar{P}$））

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} c_{ij}^{k} \sum_{p\in \bar{P}^{k}} \delta_{ij}^{p} z_{p}^{k} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{42}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{p\in \bar{P}^{k}} z_{p}^{k} = d^{k} \quad \forall k \in K \tag{43}$$

$$\sum_{i\in N_n^{+}} y_{in} - \sum_{j\in N_n^{-}} y_{nj} = 0 \quad \forall n \in N \tag{44}$$

$$\sum_{k\in K} \sum_{p\in \bar{P}^{k}} \delta_{ij}^{p} z_{p}^{k} \leq C_{ij}^{l} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{45}$$

$$\sum_{p\in \bar{P}^{k}} \delta_{ij}^{p} z_{p}^{k} \leq d^{k} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A_{\bar{P}^{k}}, k \in K \tag{46}$$

$$z_{p}^{k} \geq 0 \quad p \in \bar{P}^{k}, k \in K \tag{47}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & if\ \tilde{y}_{ij} \leq \epsilon_1 \\ 1 & if\ \tilde{y}_{ij} \geq \epsilon_2 \end{cases} \quad \forall (i,j) \in A \tag{48}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \tag{49}$$

l 回目の繰り返しにおいて，0または1に収束していないアセットデザイン変数の数を ω_l，分枝限定法の実施基準を ψ とする．$\omega_l \leq \psi$ であれば，収束した変数を固定した問題 RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\bar{P}$）に対して分枝限定法を行い，近似解を算出する．しかし，RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\bar{P}$）のように0–1変数およびパスフロー変数を限定した問題であっても，分枝限定法によって最適解を求めることが困難な場合がある．そのため，実際の計算では，分枝限定法は一定時間で打ち切り，その時点で得られた最良の上界値を UB_{RFY} とする．ただし，RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\bar{P}$）は実行可能でない場合があることに注意する．また，限定操作を強めるために，現在までに求められたの最良の上界値を分枝限定法における初期の暫定解とする．

ψ を一定値とした場合，連続した繰り返し回数において分枝限定法を繰り返し同一の解を生成することが多くなる．これを防ぐために分枝限定法を適用する毎に，ψ を β（$0 < \beta < 1$）倍して減少させる．最後に, RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$ $\bar{P}$）の最適解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を使い，アークフローによる定式化を用いた多品種フロー問題 $MCF(\hat{\boldsymbol{y}})$ を解き直し，上界値を求める．

$(MCF(\hat{\boldsymbol{y}}))$

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k x_{ij}^k \tag{50}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = \begin{cases} -d^k & if\ n = O^k \\ d^k & if\ n = D^k \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n \in N,\ k \in K \tag{51}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \le C_{ij}\hat{y}_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{52}$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

ここで，アークフローによる定式化を用いるのは，パスフローの定式化ではすべてのパスが生成されていないためである．

3．5　局所分枝法

RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$，$\bar{P}$）ではアセットデザイン変数とパスが限定されているため，この問題を分枝限定法により得られた解は必ずしも優れた解とは限らない．そのため，得られた解をもとに局所分枝を用いた分枝限定法である局所分枝法を行い，解を改善する．多くの場合，良解の近傍に別の良解が存在する可能性が高いことが考えられる．局所分枝法は，探索範囲を現在の解の近傍領域に限定することによって，効率的に良解を算出する方法である．

容量スケーリング法で求められたデザイン解を $\tilde{y}$ としたとき，$ABSNDA$ に次の二つの式を制約式として追加した $ABSNDALB(\hat{\boldsymbol{y}})$ を考える．

$$\sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=1} (1 - y_{ij}) + \sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=0} y_{ij} \le M \tag{55}$$

$$\sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=1} (1 - y_{ij}) + \sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=0} y_{ij} \ge 1 \tag{56}$$

(55)式は現在の $\hat{\boldsymbol{y}}$ の M 近傍の範囲を表す．ここで，M 近傍とは現在の解と M 個の変数値が異なる $\boldsymbol{y}$ の領域である．また，(56)式は $\hat{\boldsymbol{y}}$ を除外する制約である．

計算時間の上限 T の下で $ABSNDALB(\hat{\boldsymbol{y}})$ を解くことによって，より良い解 $\hat{\boldsymbol{y}}'$ が見つかれば，$\hat{\boldsymbol{y}} := \hat{\boldsymbol{y}}'$ として，次の制約を付加して局所分枝を繰り返す．

$$\sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=1}(1-y_{ij})+\sum_{(i,j)\in A|\hat{y}_{ij}=0}y_{ij}\geq M+1 \tag{57}$$

なお，アーク変数を用いた定式化を用いるのは，容量スケーリング法で用いたパス変数の定式化では，最適解において必要なすべてのパスが列挙されているとは限らないためである．また，計算時間の上限 T を設定するのは，探索範囲を M 近傍に限定しても，最適解を求めるためには大きな計算時間が必要となるためである．

3．6　近似解法の流れ

近似解法の全体の流れを示す．

［ステップ1］繰り返し回数の上限を l_{max}，閾値を ϵ_1 および ϵ_2，分枝限定法基準を ψ，その変化率を β とする．スケーリングパラメータを λ，近傍範囲を M，最良の上界値を UB とする．$C^1:=C$，$l:=0$，$UB:=\infty$ とする．

［ステップ2］$l:=l+1$ とする．$ABSNDPL_l$ を解き，最適解 $\hat{\boldsymbol{y}}$，$\tilde{\boldsymbol{z}}$ を求める．$\epsilon_1<\hat{\boldsymbol{y}}_{ij}<1-\epsilon_2$ を満たすアーク数を ω_l とする．

［ステップ3］$C^l:=\lambda\tilde{X}+(1-\lambda)C^{l-1}$ または $C^l:=\{1-\lambda(1-\hat{\boldsymbol{y}})\}C^{l-1}$ とする．

［ステップ4］$\omega^l>\psi$ であればステップ2へ戻る．そうでなければ，RFY（$\tilde{\boldsymbol{y}}$，$\bar{P}$）に対して分枝限定法を行い，最適解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を求める．$\psi:=\psi\times\beta$ とする．

［ステップ5］$MCF(\hat{\boldsymbol{y}})$ を解き，フロー解 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ および上界値 UB_{MCF} を求める．$UB_{MCF}<UB$ であれば $UB:=UB_{MCF}$ とする．

［ステップ6］$l\geq l_{max}$，かつ $UB\neq\infty$ でなければステップ2へ戻る．

［ステップ7］$\hat{\boldsymbol{y}}$ の M 近傍の範囲で，$ABSNDALB(\hat{\boldsymbol{y}})$ に対して局所分枝を行い，解 $\hat{\boldsymbol{y}}'$ と上界値 UB_{LBR} を求める．

［ステップ8］$UB_{LBR}<UB$ であれば，$UB:=UB_{LBR}$，$\hat{\boldsymbol{y}}:=\hat{\boldsymbol{y}}'$ として，ステップ7へ戻る．そうでなければ終了する．

ステップ5において，MCF（$\hat{\boldsymbol{y}}$）は必ずしも実行可能とは限らず，上界値が求まらない場合がある．そこで，ステップ6で $l\geq l_{max}$ であっても上界値が求まるまで計算を繰り返す．

4　数値実験

Pedersen–Crainic–Madsen（2009）が用いているベンチマーク問題であるC問題とR問題に対して，数値実験を行い，従来の研究との比較を行う．使用するベンチマー

ク問題は，C 問題が24問，R 問題が54問である．これらの問題は容量制約をもつのネットワーク設計問題で用いられるベンチマーク問題と同じインスタンスである．

比較する研究は，Pedersen–Crainic–Madsen（2009）のタブー探索法（TAB）と並列タブー探索法（PTAB），Bai–Kendal–Li（2010）のガイド付き局所探索法（GLS），Chouman–Crainic（2011）のMIPタブー探索法（MTAB），Bai–Kendal–Atkin（2012）のタブー補助ガイド付き多スタート局所探索法（TGLS），および本研究の解法（CLB）である．なお，記載した上界値と計算時間は，各論文に記載されているものである．また，上界値の誤差を算出するために，アークフローによる定式化 *ABSNDA* を数理計画ソルバー CPLEX（最大72000秒）により解き，下界値または最適値（LB/OPT）を求めている．なお，同時に CPLEX により上界値（CPLEX）も求めている．

本研究の解法（CLB）で設定した主な条件およびパラメータなどは以下の通りである．

- 容量の変更方法：$C^l := \{1-\lambda(1-\hat{\boldsymbol{y}})\}C^{l-1}$
- スケーリングパラメータ λ：0.05，0.10，0.15，0.20，0.25
- 閾値 ϵ_1，ϵ_2：0.01，0.99
- 最大繰り返し回数 l_{max}：1000
- 分枝限定法の適用基準の初期値 ψ：50
- 分枝限定法の適用基準の変更率 β：0.75
- 局所分枝の近傍 M：10
- 局所分枝の計算時間 T：300秒，600秒，900秒
- 使用言語：Visual Studio 2005 C++.NET
- 数理計画ソルバー：CPLEX 12.2（Parallel Version）

なお，各論文内で使用しているコンピュータなどは以下の通りである．

- TAB, PTAB：PC, CPU INTEL Pen4 2.26GHz
- GLS：PC，CPU INTEL Core2 1.8GHz，RAM 1GByte
- MTAB：WORKSTATON, CPU AMD Dual-Core, RAM 8GByte
- TGLS：PC, CPU INTEL Core2 1.8GHz, RAM 1GByte
- CLB：PC，CPU INTEL i7 2600 3.4GHz 4Core，RAM 16GByte
- CPLEX：Ver12.2（Parallel Version）：PC, CPU i7 2600 3.4GHz 4Core, RAM 16GByte

C 問題に対する解法別の上界値の平均誤差を表 1 に示す．表内のCLB0は局所分枝を行わない場合，CLB3は局所分枝の計算時間が300秒，CLB6は局所分枝の計算時間が600秒，CLB9は局所分枝の計算時間が900秒の場合である．タブー探索法のみの解法（TAB，PTAB）では6.04%と4.68%であるが，数理計画ソルバーと組み合せた解法（MTAB）では1.85%と誤差が小さくなっている．また，ガイド付き局所探索法のみの解法（GLS）では5.13%，タブー探索法と組み合せた解法（TGLS）では2.67%と誤差

が小さくなっている．近似解法の中では，本研究で提案した解法（CLB）が最も小さく，局所分枝を行わない場合（CLB0）でも1.52%であり，局所分枝を行う場合（CLB3, CLB6，CLB9）では1.13%，1.03%および0.96%とさらに低減しており，最良値では0.95%と１%以下となっている．従来の最良の解法に比べて，Ｃ問題に対して提案した解法による誤差は1/2程度となった．なお，直接CPLEXで解いた場合の誤差は0.79%であるが，大きな計算時間が必要となる．

Ｒ問題に対する解法別の上界値の平均誤差を表２に示す．なお，GLSとTGLSではR問題の解が記述されていないため，表には記述していない．TABとPTABでは6.19%と4.64%であるが，MTABでは1.96%と誤差が小さくなっている．近似解法の中では，本研究で提案したCLBが最も小さく，CLB0でも1.69%であり，CLB3，CLB6，CLB9では0.61%，0.50%および0.43%とさらに低減しており，最良値では0.41%と0.5%以下となっている．従来の最良の解法に比べて，Ｒ問題に対して提案した解法による誤差は1/5程度となった．なお，直接CPLEXで解いた場合の誤差は0.23%であるが，大きな計算時間が必要となる．

C問題に対する平均計算時間を表３に，R問題に対する平均計算時間を表４に示す．TAB，PTABとMTABの平均計算時間は3600秒，GLSとTGLSの平均計算時間は2400秒となっているが，これは3600秒または2400秒で計算を打ち切っているためである．Ｃ問題に対して，CLB0では平均計算時間は167.7秒であり，CLB3，CLB6，CLB9では814.7秒，1638.2秒，2616.3秒であった．R問題に対して，局所分枝を行わない場合（CLB0）では平均計算時間は246.3秒であり，CLB3，CLB6，CLB9では791.2秒，1201.9秒，1666.7秒であった．ただし，スケーリングパラメータλを変化させてそれぞれ計算を行っているため，パラメータチューニングを行わない場合，トータルの計算時間はこれらの５倍程度となる．一方，CPLEXの平均計算時間は，Ｃ問に対して50931.4秒，Ｒ問題に対して20714.9秒と極端に長くなっている．これは，CPLEXの計算時間の上限を72000秒と設定しており，多くの問題でこの上限の時間に達しているためである．

表５にＣ問題の個別の問題ごとの最適値/下界値と各解法より得られた上界値，表６に上界値の誤差を示す．なお，表内のOは最適値であり，Lは制限時間内に最適値を求めることができなかったため下界値であることを表す．表７にＲ問題の個別の問題ごとの最適値/下界値と各解法より得られた上界値，表８に上界値の誤差を示す．提案した解法は，Ｃ問題では20/700/400/F/Tを除く23問題で最良解を算出している．また，Ｒ問題ではr18.8を除く50問題で最良解，３問題で同値の解を算出している．

5　おわりに

本研究では，Pedersen–Crainic–Madsen（2009）が提示したアセットバランスを考慮

したサービスネットワーク設計問題を対象とし，この設計問題に対して容量スケーリング法と局所分枝法を組合せた近似解法を提案した．提案した解法は，従来の最良の解法と比べて，C 問題に対して誤差が1/2程度，R 問題に対して誤差が1/5程度となり，また大半の問題で最良解を算出することができた．計算時間は従来の解法と同程度であり，提案した解法は従来の最良の解法と比べて優れたものであることが分かった．

なお，本研究は科学研究費補助金基盤研究（C）（21510155）の助成を受けたものである。

表１：上界値の平均誤差の比較：C問題（%）

CPLEX	TAB	PTAB	GLS	MTAB	TGLS	CLB0	CLB3	CLB6	CLB9	CLB
0.79	6.04	4.68	5.13	1.85	2.67	1.52	1.13	1.03	0.96	0.95

表２：上界値の平均誤差の比較：R 問題（%）

CPLEX	TAB	PTAB	MTAB	CLB0	CLB3	CLB6	CLB9	CLB
0.23	6.19	4.64	1.96	1.69	0.61	0.50	0.43	0.41

表３：平均計算時間の比較：C問題（秒）

CPLEX	TAB	PTAB	GLS	MTAB	TGLS	CLB0	CLB3	CLB6	CLB9
50931.4	3600.0	3600.0	2400.0	3600.0	2400.0	167.7	814.7	1638.2	2616.3

表４：平均計算時間の比較：R問題（秒）

CPLEX	TAB	PTAB	MTAB	CLB0	CLB3	CLB6	CLB9
20714.9	3600.0	3600.0	3600.0	246.3	791.2	1201.9	1666.7

参考文献

[１] J. Andersen, M. Christiansen T. G. Crainic, and R. Grønhaug. Branch and price for service network design with asset management constraints. *Transportation Science*, Vol. 45, No. 1, pp. 33-49, 2011.

[２] J. Andersen, T. G. Crainic, and M. Christiansen. Service network design with asset management: Formulations and comparative analyses. *Transportation Research Part C*, Vol. 17, No. 2, pp. 197-207, 2009.

[３] J. Andersen, T. G. Crainic, and M. Christiansen. Service network design with management and coordination of multiple fleets. *European Journal of Operational Research*, Vol. 193, No. 2, pp. 377-389, 2009.

[４] A. P. Armacost, C. Barnhart, and K. A. Ware. Composite variable formulations for express shipment service network design. *Transportation Science*, Vol. 36, pp. 1-20, 2002.

[５] R. Bai, G. Kendal, and J. Li. An efficient guided local search approach for service network design problem with asset balancing. *ICLSIM*, Vol. 1, pp. 110-115, 2010.

[6] R. Bai, G. Kendal, R. Qu, and J. Atkin. Tabu assisted guided local search approaches for freight service network design. *Information Science*, Vol. 189, No. 15, pp. 266-281, 2012.

[7] A. Balakrishnan, T. L. Magnanti, and P. Mirchandani. Network design. In M. Dell' Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, pp. 311-334. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[8] T. Bektas and T. G. Crainic. A brief overview of intermodal transportation. Technical Report CIRRELT-2007-03, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 2007.

[9] M. Chouman and T. G. Crainic. MIP-based tabu search for service network design with design-balanced requirements. Technical Report CIRRELT-2011-68, Centre de recherche sur les transports,Université de Montréal, 2011.

[10] A. M. Costa. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers and Operations Research*, Vol. 32, pp. 1429-1450, 2005.

[11] T. G. Crainic. Long-haul freight transportation In R. W. Hall, editor, *Handbook of transportaion science*, pp. 451–516. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[12] T. G. Crainic. Service network design in freight transportation. *European Journal of Operational Research*, Vol. 122, No. 2, pp. 272-288, 2000.

[13] T. G. Crainic and K. H. Kim. Intermodal transportation. In C. Barnhart and G. Laporte, editors, *Transportation: Handbooks in Operations Research and Management Science*, pp. 467-537. North-Holland, 2007.

[14] B. Gendron, T. G. Crainic, and A. Frangioni. Multicommodity capacitated network design. Technical Report CIRRELT-98-14, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 1997.

[15] A. Hoff, A. Lium, A. Løkketangen, and T. G. Crainic. A metaheuristic for stochastic service network design. *Journal of Heuristics*, Vol. 16, No. 5, pp. 653-679, 2010.

[16] 片山直登．ネットワークデザイン問題．久保幹雄，田村明久，松井知己（編），応用数理計画ハンドブック，pp. 1184-1282. 朝倉書店, 2002.

[17] 片山直登. ネットワーク設計問題. 朝倉書店, 2008.

[18] 片山直登. 容量制約をもつネットワーク設計問題の研究の調査と数値実験の比較．流通経済大学流通情報学部紀要，Vol. 16, No. 2, pp. 1-36, 2012.

[19] M. F. Lai and H. K. Lo. Ferry service network design: optimal fleet size, routing, and scheduling. *Transportation Research Part A*, Vol. 38, No. 4, pp. 305-328, 2004.

[20] A. Lium, T. G. Crainic, and S. W. Wallace. A study of demand stochasticity in service network design. *Transportation Science*, Vol. 43, No. 2, pp. 144-157, 2009.

[21] G. Lulli, U. Pietropaoli, and N. Ricciardi. Service network design for freight railway transportation: The Italian case. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 62, No. 12, pp. 2107-2119, 2011.

[22] T. L. Magnanti and R. T. Wong. Network design and transportation planning: Models and algorithms. *Transportation Science*, Vol. 18, pp. 1-55, 1984.

[23] M. Minoux. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks*, Vol. 19, pp. 313-360, 1989.

[24] M. B. Pedersen, T. G. Crainic, and O. B. G. Madsen. Models and tabu search metaheuristics for service network design with asset-balance requirements. *Transportation Science*, Vol. 43, pp. 158-177, 2009.

[25] K. R. Smilowitz, A. Atamtúrk, and C. F. Daganzo. Deferred item and vehicle routing within integrated networks. *Transportation Research Part E*, Vol. 39, No. 4, pp. 305-323, 2003.

[26] N. Teypaz, S. Schrenk, and V. Cung. A decomposition scheme for large-scale service network design with asset management. *Transportation Research Part E*, Vol. 46, No. 1, pp. 156-170, 2010.

表５：上界値の比較：C問題

Instance	OPT/LB	CPLEX	TAB	PTAB	GLS	MTAB	TGLS	CLB0	CLB3	CLB6	CLB9	CLB
20/230/200/V/L	97273.5^{O}	97273.5	102919.0	101345.0	101267.0	98421.0	98760.0	97782.0	97273.5	97273.5	97273.5	97273.5
20/230/200/F/L	139395.0^{O}	139395.0	150764.0	148384.0	143017.0	141744.0	142213.0	140027.0	140027.0	140027.0	139526.5	139526.5
20/230/200/V/T	100221.0^{O}	100221.0	103371.0	103371.0	103428.0	101244.0	102137.3	100478.0	100221.0	100221.0	100221.0	100221.0
20/230/200/F/T	138331.2^{L}	138962.0	149942.0	144766.0	143446.0	141130.0	141802.0	140717.0	140523.5	138962.0	139149.0	138962.0
20/300/200/V/L	77183.8^{L}	77436.0	82533.0	80269.0	80183.0	78576.0	78787.0	77584.0	77584.0	77584.0	77568.0	77568.0
20/300/200/F/L	117817.5^{L}	119259.0	128757.0	126258.0	126097.0	121106.0	121773.0	120216.0	120216.0	119829.5	119599.0	119599.0
20/300/200/V/T	76207.5^{O}	76207.5	78571.0	78444.0	77839.0	76545.0	77066.0	76207.5	76207.5	76207.5	76207.5	76207.5
20/300/200/F/T	110373.6^{L}	111395.0	116338.0	116338.0	116712.0	113412.0	114465.0	112193.3	112193.3	112050.3	111744.5	111744.5
30/520/100/V/L	54683.0^{O}	54683.0	55981.0	55786.0	55437.0	55159.0	55422.0	54778.5	54683.0	54683.0	54683.0	54683.0
30/520/100/F/L	96405.4^{L}	98407.0	104533.0	101612.0	100999.0	101129.0	100290.0	101939.0	98582.0	98582.0	98291.0	98291.0
30/520/100/V/T	53023.0^{O}	53023.0	54493.0	54092.0	53644.0	53224.0	53744.0	53295.0	53032.0	53032.0	53032.0	53032.0
30/520/100/F/T	99600.7^{L}	101204.0	105167.0	104702.0	106096.0	104426.0	103996.0	103507.0	101950.5	101699.0	101846.0	101699.0
30/520/400/V/L	113939.9^{L}	114643.1	119735.0	118071.0	119344.0	115477.0	116196.0	114753.8	114753.8	114753.8	114753.8	114753.8
30/520/400/F/L	150486.1^{L}	152842.5	162360.0	160979.0	163182.0	153943.0	154941.0	154103.0	154103.0	154103.0	153358.5	153358.5
30/520/400/V/T	116281.9^{L}	116581.6	120421.0	120421.0	122877.0	116959.0	118335.7	116709.2	116709.2	116709.2	116709.2	116709.2
30/520/400/F/T	152857.7^{L}	155213.0	161978.0	161987.0	166488.0	155863.0	157939.6	156276.3	156276.3	155609.0	155609.0	155609.0
30/700/100/V/L	48693.0^{O}	48693.0	49429.0	49429.0	49465.0	49139.0	49221.0	48708.0	48693.0	48693.0	48693.0	48693.0
30/700/100/F/L	60719.5^{L}	61263.0	63889.0	63292.0	62936.0	62000.0	62055.0	61664.0	61351.0	61463.0	61351.0	61351.0
30/700/100/V/T	46750.0^{O}	46750.0	48202.0	47487.0	47518.0	46865.0	47518.0	47489.0	46750.0	46750.0	46750.0	46750.0
30/700/100/F/T	56002.4^{L}	56131.0	58204.0	57187.0	58559.0	56599.0	57571.0	56600.0	56206.0	56186.0	56186.0	56186.0
30/700/400/V/L	98277.3^{L}	99277.2	103932.0	103932.0	104534.0	99588.0	101609.5	99781.5	99781.5	99541.0	99541.0	99541.0
30/700/400/F/L	134022.7^{L}	138179.5	157043.0	148114.0	152580.0	139088.0	142563.2	138552.8	138552.8	138552.8	138552.8	138552.8
30/700/400/V/T	96041.4^{L}	97367.7	103085.0	103085.0	103581.0	97901.0	98656.8	97723.0	97686.8	97653.2	97653.2	97653.2
30/700/400/F/T	130085.3^{L}	132324.0	141917.0	138609.0	142575.0	132999.0	135777.5	133257.5	133257.5	133257.5	133257.5	133257.5
Average	98528.0	99447.1	105148.5	103665.0	104241.8	100522.4	101368.3	100180.9	99858.9	99725.9	99648.2	99634.3

表６：上界値の誤差の比較：C問題（%）

Instance	CPLEX	TAB	PTAB	GLS	MTAB	TGLS	CLB
20/230/200/V/L	0.00	5.80	4.19	4.11	1.18	1.53	0.00
20/230/200/F/L	0.00	8.16	6.45	2.60	1.69	2.02	0.09
20/230/200/V/T	0.00	3.14	3.14	3.20	1.02	1.91	0.00
20/230/200/F/T	0.46	8.39	4.65	3.70	2.02	2.51	0.46
20/300/200/V/L	0.33	6.93	4.00	3.89	1.80	2.08	0.50
20/300/200/F/L	1.22	9.29	7.16	7.03	2.79	3.36	1.51
20/300/200/V/T	0.00	3.10	2.93	2.14	0.44	1.13	0.00
20/300/200/F/T	0.93	5.40	5.40	5.74	2.75	3.71	1.24
30/520/100/V/L	0.00	2.37	2.02	1.38	0.87	1.35	0.00
30/520/100/F/L	2.08	8.43	5.40	4.76	4.90	4.03	1.96
30/520/100/V/T	0.00	2.77	2.02	1.17	0.38	1.36	0.02
30/520/100/F/T	1.61	5.59	5.12	6.52	4.84	4.41	2.11
30/520/400/V/L	0.62	5.09	3.63	4.74	1.35	1.98	0.71
30/520/400/F/L	1.57	7.89	6.97	8.44	2.30	2.96	1.91
30/520/400/V/T	0.26	3.56	3.56	5.67	0.58	1.77	0.37
30/520/400/F/T	1.54	5.97	5.97	8.92	1.97	3.32	1.80
30/700/100/V/L	0.00	1.51	1.51	1.59	0.92	1.08	0.00
30/700/100/F/L	0.90	5.22	4.24	3.65	2.11	2.20	1.04
30/700/100/V/T	0.00	3.11	1.58	1.64	0.25	1.64	0.00
30/700/100/F/T	0.23	3.93	2.12	4.57	1.07	2.80	0.33
30/700/400/V/L	1.02	5.75	5.75	6.37	1.33	3.39	1.29
30/700/400/F/L	3.10	17.18	10.51	13.85	3.78	6.37	3.38
30/700/400/V/T	1.38	7.33	7.33	7.85	1.94	2.72	1.68
30/700/400/F/T	1.72	9.10	6.55	9.60	2.24	4.38	2.44
Average	0.79	6.04	4.68	5.13	1.85	2.67	0.95

表７：上界値の比較：R 問題

Instance	OPT/LB	CPLEX	TAB	PTAB	MTAB	CLB
r13.1	147349.0 ^{O}	147349.0	147837.0	147349.0	148494.0	147349.0
r13.2	277891.0 ^{O}	277891.0	281668.0	281668.0	281087.0	277891.0
r13.3	385396.0 ^{O}	385396.0	404434.0	400656.0	403596.0	387702.0
r13.4	155887.0 ^{O}	155887.0	159852.0	156585.0	155887.0	155887.0
r13.5	295180.0 ^{O}	295180.0	311209.0	307180.0	301729.0	295180.0
r13.6	431140.0 ^{O}	431140.0	470034.0	437396.0	442410.0	431140.0
r13.7	218787.0 ^{O}	218787.0	225339.0	223541.0	219975.0	218787.0
r13.8	491560.0 ^{O}	491560.0	512027.0	510887.0	497325.0	491603.0
r13.9	782049.0 ^{O}	782049.0	875984.0	839174.0	792096.0	782049.0
r14.1	422709.0 ^{O}	422709.0	431562.0	427872.0	423538.0	422709.0
r14.2	784626.0 ^{O}	784626.0	811102.0	811102.0	797767.0	784626.0
r14.3	1119569.0 ^{O}	1119569.0	1193950.0	1157500.0	1207090.0	1120185.0
r14.4	452591.0 ^{O}	452591.0	465762.0	458240.0	455054.0	452997.0
r14.5	883051.0 ^{O}	883051.0	942678.0	917832.0	890673.0	883051.0
r14.6	1296477.0 ^{O}	1296477.0	1401880.0	1356910.0	1308890.0	1300802.0
r14.7	702614.2 ^{O}	702614.2	720882.0	720494.0	706661.0	702614.2
r14.8	1685913.1 ^{L}	1688981.0	1795650.0	1795650.0	1708510.0	1689071.0
r14.9	2755700.0 ^{O}	2755700.0	2997290.0	2997290.0	2804980.0	2755700.0
r15.1	1017740.0 ^{O}	1017740.0	1039440.0	1032640.0	1020910.0	1017740.0
r15.2	2008205.5 ^{O}	2008205.5	2170310.0	2082990.0	2023750.0	2009112.0
r15.3	2904651.8 ^{L}	2966384.0	3194270.0	3116770.0	3003990.0	2958160.5
r15.4	1174517.5 ^{O}	1174517.5	1205790.0	1191440.0	1176990.0	1174517.5
r15.5	2535837.5 ^{L}	2555593.8	2698680.0	2698680.0	2581910.0	2556040.0
r15.6	3947038.7 ^{L}	4014731.2	4447950.0	4310340.0	4121320.0	4072798.2
r15.7	2401115.0 ^{O}	2401115.0	2472860.0	2465650.0	2403970.0	2401115.0
r15.8	5795320.0 ^{O}	5795320.0	6067350.0	5969370.0	5797170.0	5796508.0
r15.9	9105014.0 ^{O}	9105014.0	10263600.0	9304650.0	9115830.0	9105014.0
r16.1	140082.0 ^{O}	140082.0	142692.0	140149.0	140787.0	140082.0
r16.2	248703.0 ^{O}	248703.0	261775.0	261775.0	261049.0	248703.0
r16.3	340641.0 ^{O}	340641.0	374819.0	360884.0	349476.0	343577.0
r16.4	142381.0 ^{O}	142381.0	145266.0	143921.0	143689.0	142381.0
r16.5	259313.0 ^{O}	259313.0	277307.0	273024.0	271795.0	259313.0
r16.6	361626.0 ^{O}	361626.0	391386.0	387601.0	376019.0	363999.0
r16.7	179639.0 ^{O}	179639.0	187176.0	185397.0	181216.0	179639.0
r16.8	387360.0 ^{O}	387360.0	423320.0	419945.0	392189.0	387360.0
r16.9	596660.0 ^{O}	596660.0	649121.0	647212.0	610267.0	597997.0
r17.1	364784.0 ^{O}	364784.0	374016.0	365913.0	367439.0	364784.0
r17.2	675029.0 ^{O}	675029.0	718135.0	702957.0	707822.0	675029.0
r17.3	947172.0 ^{O}	947172.0	1041450.0	1026040.0	1045940.0	947172.0
r17.4	382593.0 ^{O}	382593.0	393608.0	389249.0	385807.0	382992.0
r17.5	734117.0 ^{O}	734117.0	786198.0	786198.0	740298.0	734117.0
r17.6	1066292.0 ^{O}	1066292.0	1162290.0	1159440.0	1105240.0	1076368.0
r17.7	528923.0 ^{O}	528923.0	539817.0	539817.0	535474.0	528923.0
r17.8	1213747.3 ^{L}	1222318.0	1348750.0	1323330.0	1229770.0	1224764.0
r17.9	1974056.8 ^{L}	1998485.5	2227780.0	2207590.0	2036760.0	1997521.0
r18.1	844211.0 ^{O}	844211.0	864425.0	864425.0	845748.0	845748.0
r18.2	1572707.0 ^{O}	1572707.0	1640200.0	1627700.0	1615730.0	1578581.0
r18.3	2203024.0 ^{L}	2229722.0	2399230.0	2366280.0	2280820.0	2253404.0
r18.4	940627.8 ^{O}	940627.8	962402.0	962402.0	947131.0	940627.8
r18.5	1842533.8 ^{L}	1874814.5	1958160.0	1958160.0	1909340.0	1886383.0
r18.6	2734321.6 ^{L}	2792504.0	2986000.0	2986000.0	2810300.0	2810832.3
r18.7	1525156.8 ^{L}	1532022.4	1617320.0	1613790.0	1537320.0	1534743.0
r18.8	3961276.9 ^{O}	3961276.9	4268580.0	4268580.0	3961280.0	3989416.2
r18.9	6550762.5 ^{O}	6550762.5	7440780.0	7194120.0	6618400.0	6599810.5
Average	1423993.9	1429721.2	1542433.2	1505217.7	1448124.2	1433789.2

表 8 ：上界値の誤差の比較：R 問題（%）

Instance	CPLEX	TAB	PTAB	MTAB	CLB
r13.1	0.00	0.33	0.00	0.78	0.00
r13.2	0.00	1.36	1.36	1.15	0.00
r13.3	0.00	4.94	3.96	4.72	0.60
r13.4	0.00	2.54	0.45	0.00	0.00
r13.5	0.00	5.43	4.07	2.22	0.00
r13.6	0.00	9.02	1.45	2.61	0.00
r13.7	0.00	2.99	2.17	0.54	0.00
r13.8	0.00	4.16	3.93	1.17	0.01
r13.9	0.00	12.01	7.30	1.28	0.00
r14.1	0.00	2.09	1.22	0.20	0.00
r14.2	0.00	3.37	3.37	1.67	0.00
r14.3	0.00	6.64	3.39	7.82	0.06
r14.4	0.00	2.91	1.25	0.54	0.09
r14.5	0.00	6.75	3.94	0.86	0.00
r14.6	0.00	8.13	4.66	0.96	0.33
r14.7	0.00	2.60	2.54	0.58	0.00
r14.8	0.18	6.51	6.51	1.34	0.19
r14.9	0.00	8.77	8.77	1.79	0.00
r15.1	0.00	2.13	1.46	0.31	0.00
r15.2	0.00	8.07	3.72	0.77	0.05
r15.3	2.13	9.97	7.30	3.42	1.84
r15.4	0.00	2.66	1.44	0.21	0.00
r15.5	0.78	6.42	6.42	1.82	0.80
r15.6	1.72	12.69	9.20	4.42	3.19
r15.7	0.00	2.99	2.69	0.12	0.00
r15.8	0.00	4.69	3.00	0.03	0.02
r15.9	0.00	12.72	2.19	0.12	0.00
r16.1	0.00	1.86	0.05	0.50	0.00
r16.2	0.00	5.26	5.26	4.96	0.00
r16.3	0.00	10.03	5.94	2.59	0.86
r16.4	0.00	2.03	1.08	0.92	0.00
r16.5	0.00	6.94	5.29	4.81	0.00
r16.6	0.00	8.23	7.18	3.98	0.66
r16.7	0.00	4.20	3.21	0.88	0.00
r16.8	0.00	9.28	8.41	1.25	0.00
r16.9	0.00	8.79	8.47	2.28	0.22
r17.1	0.00	2.53	0.31	0.73	0.00
r17.2	0.00	6.39	4.14	4.86	0.00
r17.3	0.00	9.95	8.33	10.43	0.00
r17.4	0.00	2.88	1.74	0.84	0.10
r17.5	0.00	7.09	7.09	0.84	0.00
r17.6	0.00	9.00	8.74	3.65	0.94
r17.7	0.00	2.06	2.06	1.24	0.00
r17.8	0.71	11.12	9.03	1.32	0.91
r17.9	1.24	12.85	11.83	3.18	1.19
r18.1	0.00	2.39	2.39	0.18	0.18
r18.2	0.00	4.29	3.50	2.74	0.37
r18.3	1.21	8.91	7.41	3.53	2.29
r18.4	0.00	2.31	2.31	0.69	0.00
r18.5	1.75	6.28	6.28	3.63	2.38
r18.6	2.13	9.20	9.20	2.78	2.80
r18.7	0.45	6.04	5.81	0.80	0.63
r18.8	0.00	7.76	7.76	0.00	0.71
r18.9	0.00	13.59	9.82	1.03	0.75
Average	0.23	6.19	4.64	1.96	0.41