

## 《研究ノート》

# ポートフォリオ理論とCAPM

——T.E. コープランド=J.F. ウエ斯顿の所説を中心として——

柴 田 寛 幸

## はじめに

ポートフォリオ (portfolio) とは、「紙ばさみ」という単なる形態上の意味のほか、「折りたたみ式の書類かばん」という意味もあり、それから転じて、「各種の金融資産の組合せ」を表わす概念となつた<sup>1)</sup>。ポートフォリオ理論は、1952年にマーコビッツ (H.M. Markowitz) が初めて提唱したのであるが<sup>2)</sup>、彼は「ポートフォリオ分析の諸結果は、証券に関するその情報の論理的帰結以外の何ものでもない」<sup>3)</sup>と述べている。しかし、近年、その選択原理は、財務管理論の分野においても取り入れられ、かなりの発展をみた。ポートフォリオ理論では、選択した対象物を測定する分析の骨組として、平均一分散理論を利用する。したがって、投資家の無差別曲線は、投資收益率の平均と分散によって定義されると仮定する。平均一分散ポートフォリオ理論は、その特徴は統計的であり、それゆえに、経験的テストを必要とする。ここ数十年間における財務理論の最も重要な発展の一つは、リスクを数量化した形で示すことであった。財務リスクを正しく測定し評価することができれば、危険資産を適切に評価することが可能となる。それによって、経済における資源を最適に配分することができる。すなわち、投資家は、様々な危険証券への投資をよりベターに配分することができるし、また、経営者にとって、株主や債権者から提供された資金を稀少な資本資源にベターに配分することができる<sup>4)</sup>。

## I 単一資産の投資收益率と危険

本稿では、単一資産の投資收益率とリスクを測定することからはじめる<sup>5)</sup>。当初の投資が  $I$  であり、最終の富を  $W$  とすると、投資家の投資收益率  $R$  は、次のようになる。

$$R = \frac{W - I}{I}$$

しかしながら、現実の世界は、そのような確実なものではない。否、不確実なものである。 $R_s$  を  $s$  番目の投資收益率、 $P_s$  をその発生確率とすると、各証券の投資收益率の期待値は式(1)のように示される。

$$E(\tilde{R}) = \sum_{s=1}^n R_s P_s \quad (1)$$

ここで、期待値の属性についてみておく。

属性1：確率変数  $\tilde{R}$  プラス定数  $a$  の期待値は、確率変数の期待値プラス定数に等しい。

$$E(\tilde{R} + a) = E(\tilde{R}) + a$$

属性1は、期待値の定義式(1)を利用することによって証明される。確率変数は  $\tilde{R} + a$  なので、 $R_s$  の代りに  $\tilde{R} + a$  を代入すると、

$$\begin{aligned} E(\tilde{R} + a) &= \sum_{s=1}^n (\tilde{R}_s + a) P_s \\ &= [(R_1 + a)P_1 + (R_2 + a)P_2 + \cdots + (R_n + a)P_n] \\ &= \sum_{s=1}^n R_s P_s + a \sum_{s=1}^n P_s \end{aligned}$$

すべての事象の確率の合計は、すなわち  $\sum P_s = 1$  であるので、

$$\begin{aligned} E(\tilde{R} + a) &= \sum_{s=1}^n (R_s) P_s + a \\ &= E(\tilde{R}) + a \end{aligned}$$

1) 桐谷維『ポートフォリオ・セレクション』、3頁、春秋社。小野二郎『証券価格論』、219頁、同文館。  
2) Markowitz, H.M., "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, March 1952.  
3) Markowitz, H.M., *Portfolio Selection*, Yale University Press, New Haven, 1959, p. 205.  
4) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley Publishing Co., 1979, p. 119.  
5) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *Financial Theory and Corporate Policy*, 1979, pp. 120-125.

属性 2 : 確率変数  $\tilde{R}$  と定数  $a$  を乗じた期待値は、定数と確率変数の期待値を乗じたものに等しい。

$$E(a\tilde{R})=aE(\tilde{R})$$

証明：式(1)において  $R_s$  の代りに  $aR_s$  を代入すると、

$$\begin{aligned} E(a\tilde{R}) &= \sum_{s=1}^n [aR_s]P_s \\ &= aR_1P_1 + aR_2P_2 + \cdots + aR_nP_n \\ &= a\sum_{s=1}^n R_sP_s \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^n R_sP_s = E(\tilde{R}) \text{ であるので,}$$

$$E(a\tilde{R})=aE(\tilde{R}) \text{ となる。}$$

次に、リスクの尺度としての分散は、式(2)のように示される。

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\tilde{R}) &= E[(R_s - E(\tilde{R}))^2] \\ &= \sum_{s=1}^n (R_s - E(\tilde{R}))^2 P_s \end{aligned} \quad (2)$$

また、その属性は、以下のような。

属性 3 : 確率変数プラス定数の分散は、確率変数の分散に等しい。

$$\text{VAR}(\tilde{R}+a)=\text{VAR}(\tilde{R})$$

属性 3 は、分散の定義式(2)を利用することによって証明される。 $R_s$  の代りに  $(\tilde{R}+a)$  を代入すると、

$$\text{VAR}(\tilde{R}+a)=E[((\tilde{R}+a)-E(\tilde{R}+a))^2]$$

属性 1 :  $E(\tilde{R}+a)=E(\tilde{R})+a$  を利用すると、

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\tilde{R}+a) &= E[((\tilde{R})+a-E(\tilde{R})-a)^2] \\ &= E[(\tilde{R}-E(\tilde{R}))^2] \\ &= \text{VAR}(\tilde{R}) \text{ となる。} \end{aligned}$$

属性 4 : 確率変数と定数を乗じたものの分散は、定数の 2 乗に確率変数の分散を掛けたものに等しい。

$$\text{VAR}(a\tilde{R})=a^2\text{VAR}(\tilde{R})$$

証明：式(2)において、 $R_s$  の代りに  $a\tilde{R}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{VAR}(a\tilde{R}) &= E[(a\tilde{R}-aE(\tilde{R}))^2] \\ &= E[(a(\tilde{R}-E(\tilde{R})))^2] \\ &= E[a^2(\tilde{R}-E(\tilde{R}))^2] \\ &= a^2E[(\tilde{R}-E(\tilde{R}))^2] \\ &= a^2\text{VAR}(\tilde{R}) \text{ となる。} \end{aligned}$$

## II ポートフォリオ理論の基礎

ポートフォリオ理論では、証券投資の成果は、投資収益率によって測定され、それは次式のように示される。

$$\tilde{R}_t = \frac{\tilde{P}_t - P_{t-1} + \tilde{D}_t}{P_{t-1}} \quad (3)$$

$\tilde{R}_t$  :  $t$  期末における投資収益率

$\tilde{D}_t$  :  $t-1$  期末から  $t$  期末までの 1 株あたりの配当

$P_{t-1}$  :  $t-1$  期末における 1 株あたりの株価 (= 定数)

$\tilde{P}_t$  :  $t$  期末における 1 株あたりの株価

この場合、ティルド (~) は確率変数であることを示す。いま、正規分布で示される二種の危険資産のポートフォリオを想定して、資産  $X$  に  $a\%$ 、 $Y$  に  $b\%$  ( $1-a\%$ ) を投資したならば、ポートフォリオの投資収益率の期待値と標準偏差は、どのように示されるだろうか？ 数学的には、ポートフォリオの投資収益率は、二つの確率変数の合計として示される。

$$\tilde{R}_P = a\tilde{R}_X + b\tilde{R}_Y$$

前述の I で説明した期待値と分散の四つの属性を利用してみると、ポートフォリオの投資収益率の期待値は、次のようにになる<sup>6)</sup>。

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_P) &= E[a\tilde{R}_X + b\tilde{R}_Y] \\ &= E(a\tilde{R}_X) + E(b\tilde{R}_Y) \end{aligned}$$

属性 2 を利用すると、

$$E(\tilde{R}_P) = aE(\tilde{R}_X) + bE(\tilde{R}_Y) \quad (4)$$

となる。

また、ポートフォリオの投資収益率の分散  $\text{VAR}(\tilde{R}_P)$  は、次のように導かれる<sup>7)</sup>。

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= E[\tilde{R}_P - E(\tilde{R}_P)]^2 \\ &= E[(a\tilde{R}_X + b\tilde{R}_Y) - E(a\tilde{R}_X + b\tilde{R}_Y)]^2 \end{aligned}$$

属性 2 を用いて整理すると、

$$\text{VAR}(\tilde{R}_P) = E[(a\tilde{R}_X - aE(\tilde{R}_X)) + (b\tilde{R}_Y - bE(\tilde{R}_Y))]^2$$

角型カッコ [ ] を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= E[a^2(\tilde{R}_X - E(\tilde{R}_X))^2 + b^2(\tilde{R}_Y - E(\tilde{R}_Y))^2 + 2ab(\tilde{R}_X - E(\tilde{R}_X))(\tilde{R}_Y - E(\tilde{R}_Y))] \end{aligned}$$

分散の定義式(2)と属性 4 を利用すると、

$$\text{VAR}(\tilde{R}_P) = a^2\text{VAR}(\tilde{R}_X) + b^2\text{VAR}(\tilde{R}_Y) + 2ab\text{COV}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) \quad (5)$$

となる。したがって、ポートフォリオの投資収益率の分散は、個々の証券の分散にウェイトの 2 乗を掛けたものと、共分散をプラスしたものである。この場合、共分

6) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, p. 128.

7) *Ibid.*, p. 129.

散  $\text{COV}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) \equiv E[(\tilde{R}_X - E(\tilde{R}_X))(\tilde{R}_Y - E(\tilde{R}_Y))]$  とする。共分散は、二つの確率変数が相互にどのような方向に移動するかという尺度である。もしも共分散がプラスならば変数は同じ方向に動き、マイナスならば反対の方向に移動する。

ここで、次のような事例を設定しよう<sup>8)</sup>。

表 1 X 社株と Y 社株の投資収益率

事象 S	確率 $P_S$	$R_X$	$R_Y$
1	0.2	11%	-3%
2	0.2	9%	15%
3	0.2	25%	2%
4	0.2	7%	20%
5	0.2	-2%	6%

式(1)から各証券の投資収益率の期待値は、次のようにになる。

$$E(\tilde{R}_X) = (11 \times 0.2) + (9 \times 0.2) + (25 \times 0.2) \\ + (7 \times 0.2) + (-2 \times 0.5) = 10\%$$

$$E(\tilde{R}_Y) = (-3 \times 0.2) + (15 \times 0.2) + (2 \times 0.2) \\ + (20 \times 0.2) + (6 \times 0.2) = 8\%$$

また、式(2)から各証券の投資収益率の分散は、次の通りである。

$$\text{VAR}(\tilde{R}_X) = (11-10)^2 \times 0.2 + (9-10)^2 \times 0.2 \\ + (25-10)^2 \times 0.2 + (7-10)^2 \times 0.2 \\ + (-2-10)^2 \times 0.2 = 76\%$$

$$\therefore \sigma(\tilde{R}_X) = 8.72\%$$

$$\text{VAR}(\tilde{R}_Y) = (-3-8)^2 \times 0.2 + (15-8)^2 \times 0.2 \\ + (2-8)^2 \times 0.2 + (20-8)^2 \times 0.2 \\ + (6-8)^2 \times 0.2 = 70.8\%$$

$$\therefore \sigma(\tilde{R}_Y) = 8.41\%$$

X と Y の共分散 (covariance) は、次のように計算される。

$$\text{COV}(R_X, R_Y) = E[(R_X - E(R_X))(R_Y - E(R_Y))] \\ = (11-10)(-3-8) \times 0.2 + (9-10)(15-8) \times 0.2 + (25-10)(2-8) \times 0.2 \\ + (7-10)(20-8) \times 0.2 + (-2-10)(6-8) \times 0.2 = 24\%$$

共分散がマイナスになったが、そのことは、X と Y の投資収益率が反対の方向に移動し、危険がそれだけ相殺されるという事を意味している。

相関係数 (correlation coefficient)  $r_{XY}$  は、式(6)のように共分散を標準偏差の積で割ったものとして定

8) Ibid., pp. 130-134.

義される。

$$r_{XY} \equiv \frac{\text{COV}(R_X, R_Y)}{\sigma(R_X)\sigma(R_Y)} \quad (6)$$

相関係数が 1 の場合には完全な正の相関を、相関係数が -1 の場合には完全な負の相関を、相関係数がゼロの場合には無相関を示す。したがって、相関係数は、次のような範囲の値をとることになる。

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1$$

この事例において、相関係数は -0.33 (図 1 の実線で示される) となる。

次に、ポートフォリオの投資収益率の期待値とその分散を計算しなければならないが、その前に、もしも X に 50%, Y に 50% 投資したとするならば、ポートフォリオの投資収益率と分散は、式(4)と式(5)から、次のように計算されることになる。

$$E(\tilde{R}_P) = aE(\tilde{R}_X) + bE(\tilde{R}_Y)$$

$$= 0.5(10) + 0.5(8) = 9\%$$

$$\text{VAR}(\tilde{R}_P) = a^2 \text{VAR}(\tilde{R}_X) + b^2 \text{VAR}(\tilde{R}_Y) + 2ab$$

$$\text{COV}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$= (0.5)^2(76) + (0.5)^2(70.8)$$

$$+ 2(0.5)(0.5)(-24) = 24.7\%$$

$$\therefore \sigma(\tilde{R}_P) = 4.97\%$$

もちろん、投資家は、X と Y の組合せについて、次のような可能性をもつことができる。

表 2 投資収益率の期待値と標準偏差

X の割合	Y の割合	$E(\tilde{R}_P)$	$\sigma(\tilde{R}_P)$
1	0	10.0%	8.72%
0.75	0.25	9.5%	6.18%
0.5	0.5	9.0%	4.97%
0.25	0.75	8.5%	5.96%
0	1	8.0%	8.41%

ところで、我々は、資産ポートフォリオの投資収益率（期待値）とリスク（分散）を測定する方法を展開してきたのであるが、それでは、どのような割合で投資したならば、最小のリスクで最大の投資収益率をあげることができるのか？ すなわち、最小分散ポートフォリオを提示する X と Y の組合せを探究しなければならない。式(5)を変形すると次のようになる。

$$\text{VAR}(\tilde{R}_P) = a^2 \sigma^2(R_X) + (1-a)^2 \sigma^2(R_Y) + 2a(1-a) r_{XY} \sigma(R_X) \sigma(R_Y)$$

$a$  について微分し、ゼロとおけば、ポートフォリオ分散を最小化することができる。

$$\frac{d \text{VAR}(\tilde{R}_P)}{da} = 2a\sigma^2(R_X) - 2(1-a)\sigma^2(R_Y) + 2a(1-a)r_{XY}\sigma(R_X)\sigma(R_Y)$$

$$\begin{aligned}
 & +2r_{XY}\sigma(R_X)\sigma(R_Y)-4ar_{XY}\sigma(R_X) \\
 & \sigma(R_Y)=0 \\
 & a(\sigma^2(R_X)+\sigma^2(R_Y)-2r_{XY}\sigma(R_X)\sigma(R_Y)+r_{XY} \\
 & \sigma(R_X)\sigma(R_Y)-\sigma^2(R_Y)=0 \\
 & a^*=\frac{\sigma^2(R_Y)-r_{XY}\sigma(R_X)\sigma(R_Y)}{\sigma^2(R_X)+\sigma^2(R_Y)-2r_{XY}\sigma(R_X)\sigma(R_Y)} \quad (7)
 \end{aligned}$$

式(7)を利用して、我々の事例にあてはめると、

$$a^* = \frac{70.8 - (-0.33)(8.72)(8.41)}{76 + 70.8 - 2(-0.33)(8.72)(8.41)} = 0.487$$

となる。したがって、 $X$ 証券に48.7%， $Y$ 証券に51.3%投資した場合に、危険を最小に、しかも投資収益率を最大にすることができる。この場合、最小分散ポートフォリオをもたらすポートフォリオの投資収益率の期待値とその分散は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{R}_P) &= aE(\tilde{R}_X) + bE(\tilde{R}_Y) \\
 &= 0.487(10) + 0.513(8) = 8.974\% \\
 \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= a^2 \text{VAR}(\tilde{R}_X) + b^2 \text{VAR}(\tilde{R}_Y) + 2ab r_{XY} \\
 &\quad \sigma(\tilde{R}_X)\sigma(\tilde{R}_Y) \\
 &= (0.487)^2(76) + (0.513)^2(70.8) + 2 \\
 &\quad (0.487)(0.513)(-0.33)(8.72) \\
 &\quad (8.41) = 24.565\%
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X_P) = 4.956\%$$

また、完全な負の相関にある場合には、 $r_{XY} = -1$ であり、ポートフォリオの投資収益率とその標準偏差との関係は、図1のACB線(….)で示される<sup>9)</sup>。

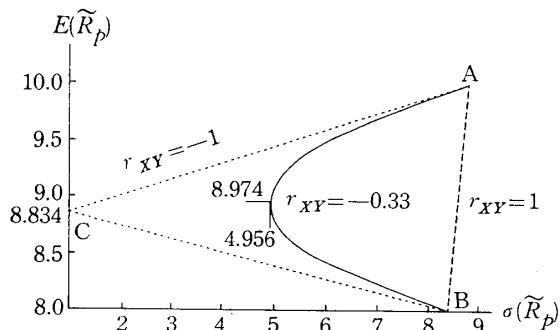


図1 2銘柄の資産の投資収益率と危険のトレード・オフ

$r_{XY} = -1$ を式(5)に代入すると、ポートフォリオの分散は、

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= a^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) \\
 &\quad + b^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) - 2ab\sigma(\tilde{R}_X)\sigma(\tilde{R}_Y) \\
 &= (a\sigma(\tilde{R}_X) - b\sigma(\tilde{R}_Y))^2
 \end{aligned}$$

したがって、その標準偏差は、

$$\sigma(\tilde{R}_P) = \pm(a\sigma(\tilde{R}_X) - b\sigma(\tilde{R}_Y))$$

$r_{XY} = -1$ を式(7)に代入すると、最小分散ポートフォリオの投資比率を求めることができる。

$$\begin{aligned}
 a^* &= \frac{\sigma^2(R_Y) + \sigma(R_X)\sigma(R_Y)}{\sigma^2(R_X) + \sigma^2(R_Y) + 2\sigma(R_X)\sigma(R_Y)} \\
 &= \frac{\sigma(R_Y)}{\sigma(R_X) + \sigma(R_Y)} \\
 &= \frac{8.41}{8.72 + 8.41} = 49.095\%
 \end{aligned}$$

それ故に、 $X$ 証券に49.095%投資したとき、このポートフォリオの投資収益率の期待値は8.834%，その標準偏差はゼロとなる。

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{R}_P) &= (0.49095)(10) + (0.50905)(8) \\
 &= 8.834\%
 \end{aligned}$$

$$\sigma(\tilde{R}_P) = (0.49095)(8.72) - (0.50905)(8.41) = 0\%$$

これは図1のC点で示される。

また、AC線とCB線の傾きは、次のようにある。

$$\begin{aligned}
 \text{AC 線の傾き} &= \frac{dE(\tilde{R}_P)}{d\sigma(\tilde{R}_P)} = \frac{dE(\tilde{R}_P)/da}{d\sigma(\tilde{R}_P)/da} \\
 &= \frac{E(R_X) - E(R_Y)}{\sigma(R_X) + \sigma(R_Y)} \\
 &= \frac{10 - 8}{8.72 + 8.41} = 0.117
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CB 線の傾き} &= \frac{dE(\tilde{R}_P)}{d\sigma(\tilde{R}_P)} = \frac{dE(\tilde{R}_P)/db}{d\sigma(\tilde{R}_P)/db} \\
 &= \frac{E(R_X) - E(R_Y)}{-(\sigma(R_X) + \sigma(R_Y))} \\
 &= \frac{10 - 8}{-(8.72 + 8.41)} = -0.117
 \end{aligned}$$

AC線は、 $X$ 証券に投資された割合が49.095%以上の場合、すなわち  $a \geq \frac{\sigma(R_Y)}{\sigma(R_X) + \sigma(R_Y)}$  であり、標準偏差として  $\sigma(\tilde{R}_P) = a\sigma(R_X) - (1-a)\sigma(R_Y)$  を利用する。その結果、AC線の傾きはプラス0.117になった。他方、CB線は、 $X$ 証券に投資される割合が49.095%よりも小さい場合、すなわち  $a < \frac{\sigma(R_Y)}{\sigma(R_X) + \sigma(R_Y)}$  であり、 $\sigma(\tilde{R}_P) = (1-a)\sigma(R_Y) - a\sigma(R_X)$  を利用して、その傾きはマイナス0.117となった。

最後に、完全な正の相関にある場合<sup>10)</sup>、すなわち  $r_{XY} = 1$ と仮定する。表3は、 $X = 1.037Y + 1.703$ という証券の投資収益率の設例である。

資産 $Y$ については前述と同じ設例を利用したので、その標準偏差は8.41%であった。図1のA点は $X$ に100%投資したときのポートフォリオのリスクと投資収益率を表わし、B点は $Y$ に100%投資した場合のそれ

9) Ibid., pp. 135-138.

10) Ibid., pp. 135-136.

表 3 完全な正の相関にある投資収益率

確 率	$R_X$	$R_Y$
0.2	-1.408%	-3%
0.2	17.258%	15%
0.2	3.777%	2%
0.2	22.443%	20%
0.2	7.929%	6%
$\sigma(R_Y) = 8.41\%$		
$\sigma(R_X) = 1.037 \sigma(R_Y) = 8.72\%$		
$\text{COV}(R_X, R_Y) = r_{XY} \sigma(R_X) \sigma(R_Y) = 73.34\%$		

らを示している。 $r_{XY}=1$  の場合、ポートフォリオの投資収益率の期待値と分散は、次のように示される。

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_P) &= aE(R_X) + bE(R_Y) \\ \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= a^2\sigma^2(R_X) + b^2\sigma^2(R_Y) \\ &\quad + 2ab\sigma(R_X)\sigma(R_Y) \end{aligned}$$

したがって、標準偏差は次のようにになる。

$$\sigma(\tilde{R}_P) = a\sigma(R_X) + b\sigma(R_Y)$$

また、AB線(---)の傾きは、次のように表示される。

$$\begin{aligned} \text{AB 線の傾き} &= \frac{dE(\tilde{R}_P)}{d\sigma(\tilde{R}_P)} = \frac{dE(\tilde{R}_P)/da}{d\sigma(\tilde{R}_P)/da} \\ &= \frac{E(R_X) - E(R_Y)}{\sigma(R_X) - \sigma(R_Y)} \\ &= \frac{10 - 8}{8.72 - 8.41} = 0.645 \end{aligned}$$

このことは、ABが直線であるということを示している。図1のAB線は、二つの資産が完全に相関している場合の、投資家にとって利用可能なリスクと投資収益率のトレード・オフを表示している。また、完全な負の相関の場合には、AC線とCB線となる。諸資産は、通常完全な相関の場合よりも小さくなる。すなわち  $-1 < r_{XY} < 1$  となり、期待値一分散の機会集合の傾きは、実線AB( $r_{XY} = -0.33$ )で示される。それ故に、最小分散の機会集合は凸面となる。

以上は、X, Y 2社株からなるポートフォリオを考察したが、3銘柄の危険資産のポートフォリオの投資収益率の期待値と分散についてはどうなるか。3銘柄の株式に投資されたポートフォリオの割合を $x_1, x_2, x_3$ とすると、ポートフォリオの投資収益率の期待値は、次のようになる<sup>11)</sup>。

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_P) &= x_1E(\tilde{R}_1) + x_2E(\tilde{R}_2) + x_3E(\tilde{R}_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 x_iE(\tilde{R}_i) \end{aligned}$$

また、その分散は次のように計算される。

$$\text{VAR}(\tilde{R}_P) = x_1^2\text{VAR}(R_1) + x_2^2\text{VAR}(R_2)$$

11) *Ibid.*, p. 146.

$$\begin{aligned} &+ x_3^2\text{VAR}(R_3) + 2x_1x_2\text{COV}(R_1, R_2) \\ &+ 2x_1x_3\text{COV}(R_1, R_3) + 2x_2x_3\text{COV}(R_2, R_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \text{COV}(R_i, R_j) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{COV}(R_i, R_j)$  は、証券  $i$  の投資収益率  $R_i$  と証券  $j$  の投資収益率  $R_j$  との共分散をさす。一般に、 $n$  銘柄の危険資産からなるポートフォリオの投資収益率の期待値と分散の式は、下記のように示される。

$$E(\tilde{R}_P) = \sum_{i=1}^n x_i E(\tilde{R}_i) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{COV}(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j r_{ij} \sigma(R_i) \sigma(R_j) \quad (9) \end{aligned}$$

ところで、最適ポートフォリオの選択には、多くの変数の推定が必要となる。一般に、 $n$  銘柄のポートフォリオの投資収益率の期待値と分散を求めるためには、表4の数の変数を推定しなければならない<sup>12)</sup>。

表 4 変数の数

証券の投資収益率の期待値	$n$
証券の投資収益率の分散	$n$
相関係数（共分散）	$\frac{n(n-1)/2}{n(n+3)/2}$
推定値の総数	$\frac{n(n+3)/2}{n(n+3)/2}$

ニューヨーク株式取引所では、少なくとも 2,000 社の証券を上場しているが、その場合、2,000 の投資収益率の期待値、2,000 の分散、 $1,999,000(n(n-1)/2)$  の共分散を見積ることが必要となる。また、100 銘柄の証券のポートフォリオに必要な  $5,150(n(n+3)/2)$  のインプットについてみると、4,950 が相関係数（共分散）であり、投資収益率の期待値とその分散の数は 200 にすぎない。マーコビッツは、必要な相関係数の数を減らすために、単純化された「市場モデル」を提案した。たとえば、100 銘柄の証券のポートフォリオに必要な 4,950 の相関係数の代りに、102 の変数だけが推定されればよいことになる。そこには、市場の投資収益率の期待値とその分散、および個々の証券と市場の投資収益率との関係を示す 100 の指標が含まれる。市場モデルは、次のように示される<sup>13)</sup>。

$$\begin{aligned} R_i &= \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \quad (10) \\ \alpha_i &= E(R_i) - \beta_i E(R_m) \\ \beta_i &= \text{COV}(R_i, R_m) / \sigma^2(R_m) \end{aligned}$$

12) Lev, Baruch., *Financial Statement Analysis: A New Approach*, 1974, pp. 187-189.

13) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, p. 165.

また、その分散は式(10)から、次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma^2(R_i) &= \sigma^2(\alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i) \\ &= \beta_i^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_i)\end{aligned}\quad (11)$$

$R_i$  は  $i$  資産の投資収益率であり、 $R_m$  は市場の全証券の投資収益率である。通常、個々の資産の投資収益率は、二つの部分に分けられる。一つは、一般的要素  $\beta_i R_m$  であって、他は、 $\alpha_i + \varepsilon_i$  である。また、それらを個々の証券の総リスクで表わすと前者は、組織的リスク (systematic risk)  $\beta_i^2 \sigma^2(R_m)$  と呼ばれ、証券が経済 ( $R_m$ ) とともにいかに共通して変動するかの尺度であり、後者は、非組織的リスク (unsystematic risk)  $\sigma^2(\varepsilon_i)$  と呼ばれ、経済とは無関係な  $i$  証券に固有な変動から生ずるものである。すなわち、総リスク = 組織的リスク + 非組織的リスク、から成り立っており、いかなる証券の収益率も、経験的には、市場利子率プラス市場とは無関係な確率誤差  $\varepsilon_i$  とのリニアな関数であるということに注目する必要がある。

### III 最適ポートフォリオの選択

効用理論では、リスク回避型の投資家の無差別曲線は、右上りで下方にふくらんだ凸面となり、図2の  $I_1 \sim I_4$  で示される<sup>14)</sup>。他方、曲線 AF は、多種銘柄の危険証券の組合せから可能なポートフォリオ集合の境界線を示し、そのうち上半分にある曲線 AD は効率的フロンティアと呼ばれる。次に、このなかから最

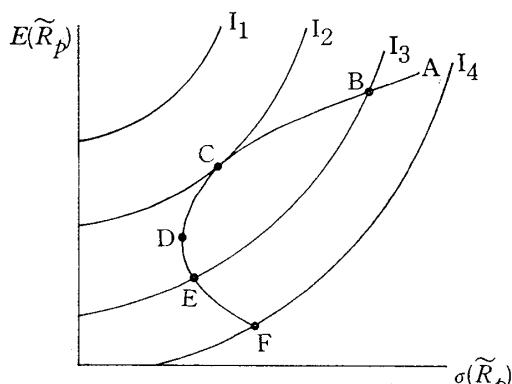


図 2 最適ポートフォリオの選択

適ポートフォリオ (optimal portfolio) を選択しなければならないが、最適ポートフォリオは、投資家の期待効果を最大化するするポートフォリオであり、投資家の無差別曲線と効率的フロンティアが接する場所C点である。無差別曲線は、上にいくほど効用水準が高

14) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, p. 139.

く危険回避型であり、下にいくほど効用水準は低くなる。

次に安全証券を考察の対象に加える<sup>15)</sup>。危険証券を  $X$ 、安全証券を  $F$  とし、それぞれの投資比率を  $a\%$ 、 $1-a\%$ 、とする。安全証券への投資は、元金と利子の支払いの確実な貸付けとみなすことができるので、貸付けポートフォリオ (lending portfolio) と呼ばれる。このポートフォリオの投資収益率の期待値と分散は、次式のように示される。

$$\begin{aligned}E(\tilde{R}_P) &= aE(R_X) + (1-a)R_f \\ \text{VAR}(\tilde{R}_P) &= a^2 \text{VAR}(R_X) + (1-a)^2 \text{VAR}(R_f) \\ &\quad + 2a(1-a)r_{Xf}\sigma(R_X)\sigma(R_f) \\ &= a^2 \text{VAR}(R_X)\end{aligned}$$

安全証券  $F$  の分散はゼロであるので、上式の第2項と第3項はゼロとなり、それ故に、ポートフォリオの分散は、危険証券の単なる分散となる。

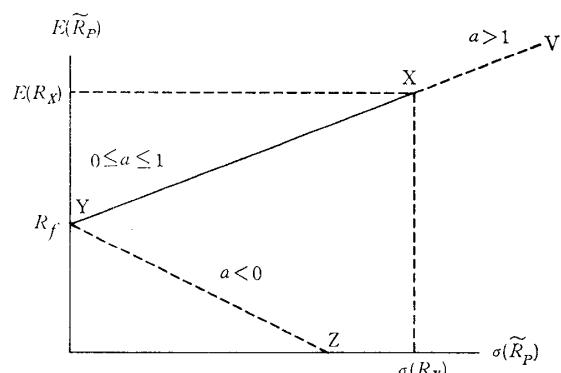


図 3 一つの危険証券と一つの安全証券の機会集合

借入利子率と貸付利子率が等しいと仮定するとき、図3の YXV は直線となる。そして、その直線の傾きは、

$$\frac{dE(\tilde{R}_P)}{d\sigma(\tilde{R}_P)} = \frac{dE(\tilde{R}_P)/da}{d\sigma(\tilde{R}_P)/da} = \frac{E(R_X) - R_f}{\sigma(R_X)}$$

となる。もちろん、現実の世界では借入利子率と貸付利子率とは等しくならない。それは、取引費用すなわち摩擦が存在するからである。しかし、経済学者等は、すべての資産が無限に分割でき、取引費用がかからない摩擦のない世界を仮定する。図3の点線 XV は、借入ポートフォリオ (borrowing portfolio)，すなわち危険資産にポートフォリオの 100% 以上を投資するために、借入を想定したものである。点線 XV は、危険資産に投資した割合が 1 以上つまり  $a > 1$  の場合である。このポートフォリオの期待値と標準偏差は、次のようにになる。

15) *Ibid.*, pp. 143-145.

$$E(\tilde{R}_P) = aE(\tilde{R}_X) + (1-a)R_f$$

$$\sigma(\tilde{R}_P) = a\sigma(\tilde{R}_X)$$

他方、投資家が安全証券にポートフォリオの 100% 以上を投資するときには、危険証券を短期的に販売しなければならない。この場合、 $a < 0$  となり、ポートフォリオの期待値と標準偏差は次のようになる。

$$E(\tilde{R}_P) = (1-a)R_f + aE(\tilde{R}_X)$$

$$\sigma(\tilde{R}_P) = |a|\sigma(R_X)$$

しかし、どのような危険回避投資家も、点線 YZ を好む者はいない。したがって、投資家は、プラスの傾きの線分 YXV 上において、ベターな効率的集合を有する。

次に、 $n$  銘柄の危険証券と一つの安全証券の効率的集合を考える。それは図 4 のように示される<sup>16)</sup>。

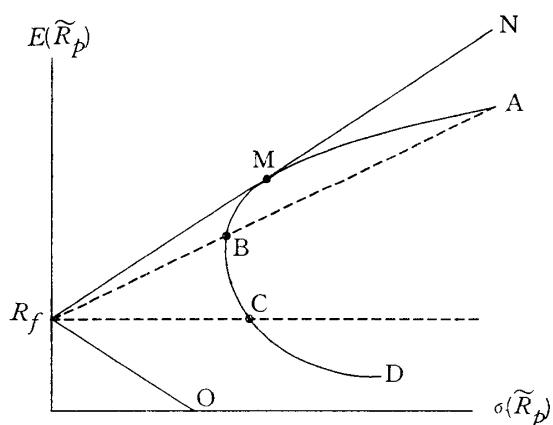


図 4  $n$  銘柄の危険証券と一つの安全証券の効率的集合

借入利子率と貸付利子率とが等しいと仮定するとき、 $n$  銘柄の危険証券と安全証券との間に直線が引かれる。直線にそった諸点は、安全証券と危険証券の組合せから成るポートフォリオを表わす。そして、すべての投資家は、安全証券と効率的集合上のポートフォリオ M の組合せを好む。これらの組合せは、NMR\_fO 線上のプラスの傾きの部分に存在する。それ故に、線分  $R_fMN$  で示された効率的集合は、直線である。

#### IV 資本市場理論の応用

これまで、個々の投資家が、ポートフォリオ分析を行なうということを考えてきたわけであるが、資本市場理論では、市場における多数の投資家がどのように行動するかということを対象とする。借入利子率と貸付利子率との均衡の仮定に加えて、すべての投資家が、すべての資産から生ずる投資収益率の確率分布の期待

値について同一の信念をもっているという仮定を付け加えるならば、彼らは同じ効率的集合を認識することになる。安全証券をポートフォリオに組み入れることによって、全投資家は、危険資産の効率的集合と安全証券の利子率とが接する直線において、すなわち、最適リスク・ポートフォリオ（市場ポートフォリオ）M と安全証券の利子率  $R_f$  とを結ぶ直線を認識することによって新しい展開を開始した。この直線は、資本市場線 (Capital Market Line, CML) として知られている。資本市場線は、次のように導かれる。ポートフォリオの投資収益率の期待値と標準偏差は、

$$E(\tilde{R}_P) = aE(R_X) + (1-a)R_f$$

$$\sigma(\tilde{R}_P) = a\sigma(R_X)$$

であるから、上式を  $a$  について求めると、

$$\begin{cases} a = \frac{E(\tilde{R}_P) - R_f}{E(R_X) - R_f} \\ a = \frac{\sigma(\tilde{R}_P)}{\sigma(R_X)} \end{cases}$$

右辺が等しいので、 $E(\tilde{R}_P)$ について解くと、

$$E(\tilde{R}_P) = R_f + \frac{E(R_X) - R_f}{\sigma(R_X)} \sigma(\tilde{R}_P)$$

$X$  を  $m$  に代えて書き直すと、

$$E(\tilde{R}_P) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)} \sigma(\tilde{R}_P) \quad (12)$$

となる。また、資本市場線は、図 5 のように示される。

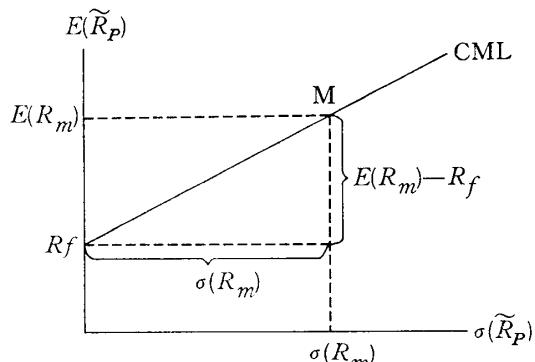


図 5 資本市場線

資本市場線は、切片が安全証券の利子率  $R_f$  であり、その傾きは  $[E(R_m) - R_f]/\sigma(R_m)$  である。そして、この傾きは、危険の均衡価格と呼ばれ、すべての個人にとって同一である。したがって、異なった株主が異なる危険回避度をもっていても、すべての株主がこの危険の均衡価格に同意するだろうし、たとえば、企業経営者が、株主の嗜好とは関係なく、投資プロジェクトを評定するために、市場で決定された危険の均衡価格を利用することができるという含みがある。また、

16) *Ibid.*, p. 149.

この直線は、すべての投資家にとっての効率的集合となる。ところで、すべてのリスク回避投資家のポートフォリオが、二つのポートフォリオの異なる組合せから成り立っているという事実は、極端に強力な結果である。それは、二つの資金の分離定理として知られるようになった。分離定理とは、投資家の無差別曲線とは無関係に二つの資金（市場ポートフォリオと安全証券）の種々な組合せを決定することを意味する<sup>17)</sup>。

以上の関係を図示すると、図6-1および図6-2のようになる<sup>18)</sup>。

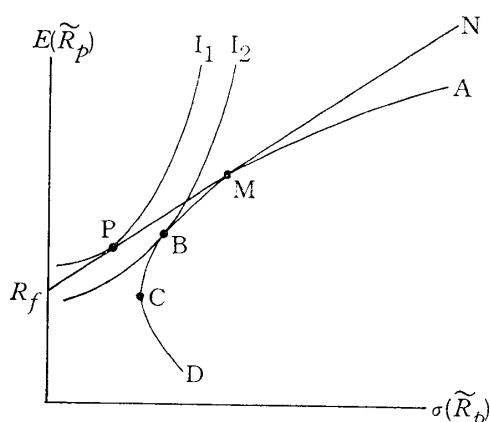


図 6-1 資本市場における期待効用の極大化

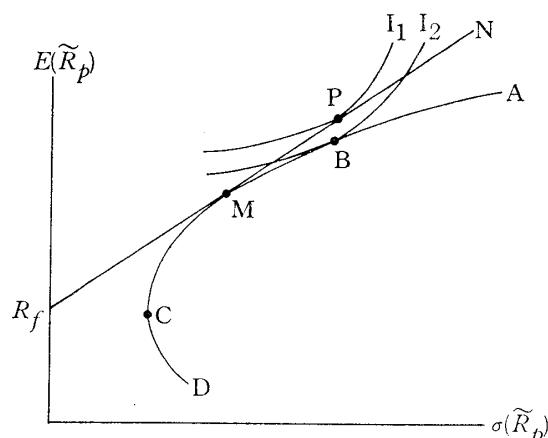


図 6-2 資本市場における期待効用の極大化

安全証券を考えない場合、投資家は、効率的ポートフォリオの集合 ABC と無差別曲線が接する B 点で、すなわち最適ポートフォリオにおいて、期待効用を最大化する。しかし、投資家が、安全証券を考慮の対象に組入れて、資本市場線にそって動く機会を保有する

ならば、M点（市場ポートフォリオ）にまで移動することによって、投資家はさらに最高の無差別曲線と接する P 点に移動し、期待効用を  $I_2$  から  $I_1$  まで増大させることができる。このことは、投資家が資金を危険証券（M）と安全証券（ $R_f$ ）とに分散して全体が 100% になるように投資することを意味する（図 6-1、貸付けポートフォリオ）。他方、投資家が、自己資金以上に借入をして、危険証券 M に投資する場合、借入れば P 点（図 6-2）になり、同様に期待効用を  $I_2$  から  $I_1$  まで増大させることができる。

ところで、「資本市場線は、安全証券と市場ポートフォリオとの組合せによる効率的ポートフォリオにおける投資収益率の期待値とリスクとの関係を、市場ポートフォリオとの関連で明らかにするものである」<sup>19)</sup>ので、それは効率的ポートフォリオに限定され、効率的でないポートフォリオや証券については、その期待収益率とリスクとの関係を資本市場線から明らかにすることはできない。そこで、効率的でないポートフォリオまたは証券の期待収益率とリスクとの関係を、安全証券および市場ポートフォリオとの関連で明確にするために、証券市場線（Security Market Line, SML）の理論を導入する。証券市場線では、リスクの市場価格と単一資産に関するリスクの適切な尺度を決定するために、市場均衡の概念を拡張する。この問題を解くための経済学的モデルは、Sharpe [1963, 1964] と Treynor [1961] によってほとんど同時に展開され、他方、Mossin [1966], Lintner [1965, 1969] および Black [1972] はそれをさらに発展させた。ここで論じるモデルは、通常、資本資産評価モデル（Capital Asset Pricing Model, CAPM）と呼ばれている。

CAPM は次のような諸仮定のもとで展開される<sup>20)</sup>。

1. 投資家は、彼らの期末の富の期待効用を極大化するリスク回避的な個人である。
2. 投資家は、プライス・ティマーであり、結合正規分布をもつ投資収益率について同質の期待値をもっている。
3. 投資家がリスクのない利子率で、無制限に借り入れ、貸付けるようなリスクのない資産が存在する。
4. 資産数量は固定的であり、すべての資産は、市場性があり、完全に分割可能である。
5. 資本市場は摩擦がなく、情報は費用がかからず、同時に、すべての投資家に利用できる。

17) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, pp. 150-152.

18) 柴川林也『新版投資決定論』, 111 頁, 同文館。

19) 諸井勝之助『経営財務講義』, 101 頁, 東京大学出版会.

20) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, pp. 160-161.

6. 税金、規制、短期販売の制約といったような市場の不完全性は存在しない。

以上の諸仮定のうち、重要な部分について触れておく。まず、市場は摩擦がないので借入利子率と貸付利子率は等しい。そして、すべての資産は分割可能であるので、誰でも他の投資家に人的資本のさまざまな部分を市場価格で売却することができる。他の重要な仮定は、投資家が同質的な信念をもっているので、同一の効率的集合に基づかれた意思決定をするということである。また、すべての投資家は、期末の富の期待効用を極大化しようとしているので、このモデルは暗に一期間モデルであるということである。これらの諸仮定は、必ずしも現実と一致するとは限らないが、財務的意思決定にとってきわめて有用である。

CAPM すなわち証券市場線は、次のように導びかれる。危険資産  $i$  に  $a\%$ 、市場ポートフォリオに  $(1-a)\%$  投資されたポートフォリオの投資収益率の期待値と標準偏差は、次式の通りである。

$$E(\tilde{R}_P) = aE(\tilde{R}_i) + (1-a)E(\tilde{R}_m)$$

$$\sigma(\tilde{R}_P) = [\alpha^2 \sigma^2(R_i) + (1-\alpha)^2 \sigma^2(R_m) + 2\alpha(1-\alpha)\text{COV}(R_i, R_m)]^{1/2}$$

この場合、

$\sigma^2(R_i)$  : 危険資産  $i$  の分散

$\sigma^2(R_m)$  : 市場ポートフォリオの分散

$\text{COV}(R_i, R_m)$  : 危険資産  $i$  と市場ポートフォリオの共分散

図7は、市場ポートフォリオ  $M$  と安全資産  $R_f$  と危険資産  $i$  の関係を示し、 $R_f$  と  $M$  を結ぶ直線は資本市場線である。 $iMi'$  線は、危険資産と市場ポートフォリオの種々な組合せによって提供された機会集合を表わす。

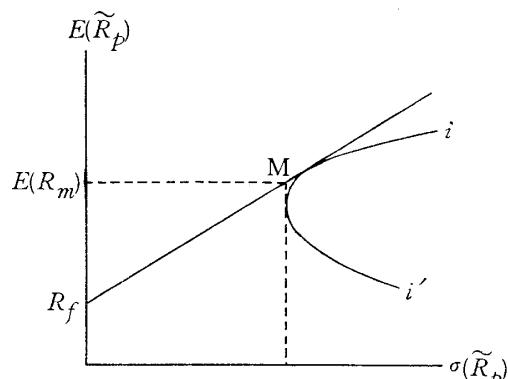


図7 危険資産  $i$  と市場ポートフォリオ  $M$  の組合せによる機会集合

上記の式を  $a$  について微分すると、

$$\frac{dE(\tilde{R}_P)}{da} = E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_m)$$

$$\frac{d\sigma(\tilde{R}_P)}{da} = \frac{1}{2} [\alpha^2 \sigma^2(\tilde{R}_i) + (1-\alpha)^2 \sigma^2(\tilde{R}_m) + 2\alpha(1-\alpha)\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)]^{-1/2}$$

$$\times [2\alpha\sigma^2(\tilde{R}_i) - 2\sigma^2(\tilde{R}_m) + 2\alpha\sigma^2(\tilde{R}_m) + 2\text{COV}(R_i, R_m) - 4\alpha\text{COV}(R_i, R_m)]$$

点  $M$  において、 $a=0$  であるので、

$$\left. \frac{dE(\tilde{R}_P)}{da} \right|_{a=0} = E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_m)$$

$$\left. \frac{d\sigma(\tilde{R}_P)}{da} \right|_{a=0} = \frac{1}{2} [\sigma^2(\tilde{R}_m)]^{-1/2} [-2\sigma^2(\tilde{R}_m) + 2\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)]$$

$$= \frac{\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - \sigma^2(\tilde{R}_m)}{\sigma(\tilde{R}_m)}$$

市場均衡における、 $M$ 点で評価されたリスクと収益率のトレード・オフ ( $iMi'$ ) の傾きは、次の通りである。

$$\left. \frac{dE(R_P)/da}{d\sigma(R_P)/da} \right|_{a=0} = \frac{E(R_i) - E(R_m)}{\text{COV}(R_i, R_m) - \sigma^2(R_m)} \sigma(R_m)$$

最後に、危険資産と市場ポートフォリオ  $M$  点の関係を示す機会集合  $iMi'$  の傾きは、資本市場線の傾き

$$[E(R_m) - R_f]/\sigma(R_m)$$
 (図5) に等しいので、

$$\frac{E(R_i) - E(R_m)}{\text{COV}(R_i, R_m) - \sigma^2(R_m)} \sigma(R_m) = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)}$$

整理すると、

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)} \quad (13)$$

式(13)が証券市場線 (SML) の式であり、また、それは図8のように示される。

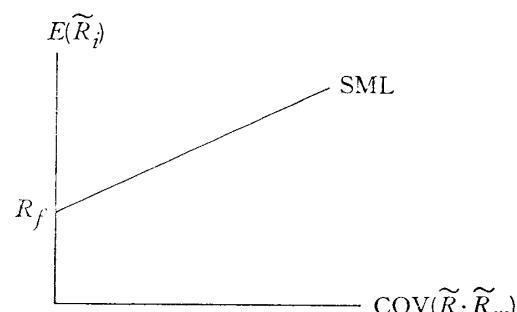


図8 証券市場線

個々の証券の投資収益率の期待値  $E(R_i)$  は、安全証券の利子率  $R_f$  にリスク・プレミアムを加えたものに等しい。また、リスク・プレミアムは、危険の価格と危険の量を乗じたものである。危険の価格は、市場ポートフォリオの投資収益率の期待値と安全証券の利子率との差、すなわち直線の傾きを表わし、危険の量は  $\beta_i$  と呼ばれる。 $\beta_i$  は、危険資産  $i$  の投資収益率と市

場ポートフォリオ  $M$  との共分散  $\text{COV}(R_i, R_m)$  を市場ポートフォリオの分散  $\sigma^2(R_m)$  で割ったものであり、式(14)のように示される<sup>21)</sup>。

$$\beta_i = \frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)} = \frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\text{VAR}(R_m)} \quad (14)$$

安全証券のベータはゼロである。というのは、市場ポートフォリオとの共分散はゼロだからである。また、市場ポートフォリオのベータは 1 となる。それは市場ポートフォリオそれ自体の共分散は市場ポートフォリオの分散と同一であるからである。したがって、市場ポートフォリオのベータは次のようになる。

$$\beta_m = \frac{\text{COV}(R_m, R_m)}{\text{VAR}(R_m)} = \frac{\text{VAR}(R_m)}{\text{VAR}(R_m)} = 1$$

また、式(13)の証券市場線をベータで表わすと、

$$E(R_i) = R_f + [E(\tilde{R}_m) - R_f] \beta_i \quad (15)$$

となり、図 9 のように示される。

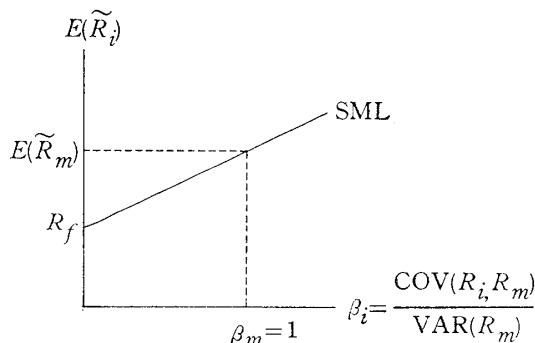


図 9 資本資産評価モデル

さらに、式(15)は、

$$E(R_i) - R_f = [E(R_m) - R_f] \beta_i$$

となる。この場合、左辺は、 $i$  証券の投資収益率の期待値が安全証券の利子率を超過する額を表わし、 $i$  証券の超過収益率と呼ばれ、右辺は、市場ポートフォリオの投資収益率の期待値が安全証券の利子率を超過する額を表わし、市場ポートフォリオの超過収益率と呼ばれる。また、 $\beta_i$  は、 $i$  証券の超過収益率が、市場ポートフォリオの超過収益率にどのように反応するかという<sup>22)</sup>、変動性の尺度を示す。

## V CAPM の応用

### 1. 評価

CAPM は、個々の資産の危険に関する定量的尺度を示すが故に、危険資産を評価するためのきわめて有

21) *Ibid.*, pp. 162-165.

22) 諸井勝之助、前掲書、108 頁、

用な手法である。そこで、まず、不確実性下の単一期間モデルを仮定して、資産を評価する。普通株については、資本利得プラス配当と考えられたが、社債の場合には、元金の償還プラス社債利息と置き換えることができる。危険資産の場合には、投資収益率  $\tilde{R}_i$  は、次のように示すことができた。

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{P}_e - P_o}{P_o} \quad (16)$$

この場合、 $\tilde{P}_e$  は期末における現金流入額であり、 $P_o$  は現在の株価である。CAPM は、次の通りであった。

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

$$\lambda = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma^2(R_m)} \text{ とする,}$$

$$E(R_i) = R_f + \lambda \text{COV}(R_i, R_m) \quad (17)$$

と書き換えることができる。 $\lambda$  は危険単位当たりの市場価格であるが、式(16)と(17)は等しいので、

$$\frac{E(\tilde{P}_e) - P_o}{P_o} = R_f + \lambda \text{COV}(R_i, R_m)$$

$P_o$  を危険資産の均衡価格と理解すると、

$$P_o = \frac{E(\tilde{P}_e)}{1 + R_f + \lambda \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)} \quad (18)$$

となる。式(18)は、危険調整収益率の評価公式として論及される<sup>23)</sup>。分子は危険資産の期待期末価格であり、分母は割引率と想定される。当該資産が危険資産でない場合には、市場との共分散はゼロとなり、割引率は  $1 + R_f$  となる。ところで、 $\lambda \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)$  は、リスク・プレミアムであるが、評価に対する確実性等価アプローチは、分子の  $E(\tilde{P}_e)$  からリスク・プレミアムを控除したものを、 $1 + R_f$  で割引いて求められる。危険資産と市場との共分散は、次のように示される。

$$\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) = \text{COV}\left[\frac{\tilde{P}_e - P_o}{P_o}, \tilde{R}_m\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\tilde{P}_e - P_o}{P_o} - \frac{E(\tilde{P}_e) - P_o}{P_o}\right)(\tilde{R}_m - E(\tilde{R}_m))\right]$$

$$= \frac{1}{P_o} \text{COV}(\tilde{P}_e, \tilde{R}_m)$$

これを危険調整収益率を示す式(18)に代入すると、

$$P_o = \frac{E(\tilde{P}_e)}{1 + R_f + \lambda(1/P_o) \text{COV}(\tilde{P}_e, \tilde{R}_m)}$$

確実性等価の評価公式は、次のようになる<sup>24)</sup>。

23) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, pp. 169-170.

24) *Ibid.*, p. 170. Neave, Edwin H., and Wigington, John C., *Financial Management: Theory and Strategies*, Prentice-Hall, 1981, p. 174.

$$P_o = \frac{E(\tilde{P}_e) - \lambda \text{COV}(\tilde{P}_e, \tilde{R}_m)}{1 + R_f} \quad (19)$$

危険調整収益率式(18)と確実性等価アプローチ式(19)とは、単一期間評価モデルにおいて等しいが、この二つの方法において、価額は個人の効用選好に依存せず、我々は、期末の現金流入の期待値、その資産のリスク量、危険のない利子率、危険の市場価格を用いて、価額を決定することができる。

## 2. 会社政策

一期間評価モデルは、①株式、社債の評価、②企業による投資プロジェクトの選択、③資本コストの測定、④資本構成（最適負債比率）の決定に利用されるが、以降では、負債がなく、法人税もないと仮定した場合の②と③の CAPM について考察する。その場合、企業の自己資本コストは、CAPM によって直接提示される。会社のベータは、その普通株の投資収益率と市場指標との共分散を計算することによって測定されるが、それは普通株の組織的リスクを意味する。自己資本の組織的リスクと市場収益率を見積ることができれば、CAPM を利用して、企業の自己資本の必要収益率  $E(R_i)$  すなわち自己資本コスト  $k_e$  を決定することができる。

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i$$

$$E(R_i) = k_e$$

自己資本コストは、図10で示される。すべてのプロジェクトが当該会社と同じリスクをもつ限り、 $k_e$  は新

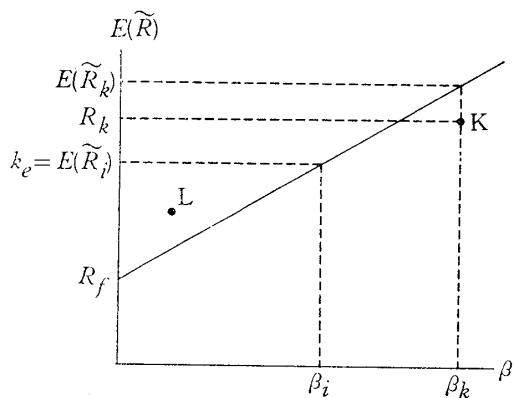


図 10 CAPM を利用した自己資本コスト

規資本プロジェクトの最低必要収益率と解釈されることになる。しかし、当該プロジェクトが会社全体とは異なったリスクをもっているならば、どうであろうか。そのときは、プロジェクトの組織的リスクを見積り、適切な必要収益率を決定するために、CAPM を利用

することが必要となる。図10では、プロジェクトKの期待収益率は、会社の自己資本コストよりも高い。しかし、そのプロジェクトは、より大なる組織的リスクをもっているために、当該会社の危険よりもより危険が高い。もしも、経営者が、当該会社の自己資本  $k_e$  と同じ収益率を稼得することを要求するならば、その予想収益率  $R_k$  は、会社の自己資本コストよりも大きいので、プロジェクトKは承認されることになる。しかし、これは誤りである。市場は、 $\beta_k$  の組織的リスクをもつプロジェクトについて  $E(R_k)$  の収益率を要求する。しかし、そのプロジェクトは  $R_k < E(R_k)$  のなので、当該プロジェクトは承認されない。だが、プロジェクトLの場合は、証券市場線より上に存在するために承認されることになる<sup>25)</sup>。

## 3. 投資決定と資本コスト

2. 会社政策で論述されたことと同様な論題の展開は、ウェ斯顿 (J.F. Weston) の論文 (“Investment Decisions Using the Capital Asset Pricing Model”, *Financial Management*, Spring 1973) で取り扱われている。彼は、Logue and Merville や Rubinstein の論文を基礎にして、CAPM を用いた投資決定および資本コストについて具体例を挙げて論述している。ところで、CAPM は、式(15)で次のように示された。

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i \quad (15)$$

式(15)は、個々の証券または実物投資の期待収益率が、リスクのない利子率プラスリスク・プレミアムによって表わされる、ということを意味していた。この式の最大の利点は、 $\beta$ 以外の他のすべての要因は、市場に広く行きわたっている定数であるということである。もしも、 $\beta$  が安定しているならば、期待収益率は容易に測定することができる。長期的な市場収益率は、フィッシャーの研究によって、9~10% の水準にあるということが示された。他方、 $R_f$  の水準は、4~5% の水準にあった。そこで、たとえば、 $\beta=2$  とすると、

$$E(R_i) = 4\% + (9\% - 4\%)2 = 14\%$$

$$E(R_i) = 5\% + (10\% - 5\%)2 = 15\%$$

投資の期待収益率は14~15% となる。

また、式(15)は、実物投資のプロジェクトの決定にも利用される（肩文字をつけてある）。

$$E(R_{i^0}) > R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_{i^0} \quad (20)$$

式(20)は、新規プロジェクトの期待収益率が、純粋利子率プラス市場リスク・プレミアムを超過していない

<sup>25)</sup> Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, pp. 171-172.

ればならない（超過収益率がプラスとなる）ということを意味している。式(20)は式(17)を用いて、次式のような形で示すこともできる。

$$\frac{E(R_i^0) - R_f}{\text{COV}(R_i^0, R_m)} > \lambda \quad (21)$$

以上のような方法を、危険の市場価格 (the market price of risk, MPR) 基準による投資決定方法と呼び、図11のように、証券市場線の上に位置するプロジェクト

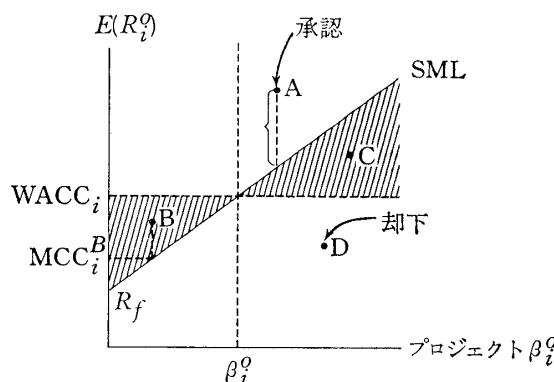


図 11 投資の棄却率の説明

トはすべて承認され(AとB)、証券市場線の下に位置するプロジェクトはすべて却下される(CとD)。これを、伝統的な加重平均資本コスト (the weighted average cost of capital, WACC) 基準によるアプローチと比較すると、その違いが明白になる。たとえば、プロジェクトCは、MPR基準では却下されるが、WACC基準では承認されることになる。プロジェクトBでは反対のことが生ずる。しかしながら、WACC線を図11のように引くことは不適当であろう。というのは、加重平均資本コストは、一定のリスク・クラスに適用されるのに対し、企業の組織的リスクは横軸にそって変化するからである<sup>26)</sup>。

次に、ウェストンにもとづいて、モスティン社の事例を想定しよう<sup>27)</sup>。まず、GNP(国民総生産)の将来の実質成長率の見通しについて、次の四つの状態が予想されるとする。状態1はかなり深刻な不況、状態2はゆるやかな不況、状態3はゆるやかな回復、状態4は強い景気上昇である。これらの将来の代替的状態の確率は、表5のように示される<sup>28)</sup>。

表 5 モスティン社の事例

(1) 状態 S	(2) 確率 $P_s$	(3) 市場 収益率 $R_m$	各プロジェクトの収益率			
			(4) #1	(5) #2	(6) #3	(7) #4
1	0.1	-0.30	-0.46	-1.00	-0.40	-0.40
2	0.2	-0.10	-0.26	-0.50	-0.20	-0.20
3	0.3	0.01	0.40	0.00	0.00	0.60
4	0.4	0.30	0.00	1.00	0.70	0.00

モスティン社は、資本拡張計画において、表5の四つのプロジェクト (#1～#4) を考慮中である。財務担当副社長は、当社の加重平均資本コスト (WACC) を12%と見積った。経済スタッフは、市場ポートフォリオの収益率 ( $R_m$ ) を(3)列のように予測した。また、リスクのない収益率は4%である。財務部は、四つの状態のもとでの各プロジェクト (#1～#4) の投資収益率を(4)列から(7)列までのように予測した。なお、各プロジェクトの支出額は、50,000ドルである。各プロジェクトが独立的であり、四つのプロジェクトすべてを実施するのに十分な資金が得られるならば、WACCとMPR基準を利用する場合、どのプロジェクトが承認されるだろうか？

表6は、市場収益率の期待値と、その分散および標準偏差を計算したものである。市場収益率の期待値

表 6 市場パラメータの計算

(1) $P_s$	(2) $R_m$	(3) $PR_m$	(4) $R_m - E(R_m)$	(5) $[R_m - E(R_m)]^2$	(6) $P[R_m - E(R_m)]^2$
0.1	-0.3	-0.03	-0.4	0.16	0.016
0.2	-0.1	-0.02	-0.2	0.04	0.008
0.3	0.1	0.03	0	0	0
0.4	0.3	0.02	0.2	0.04	0.016
$E(R_m) = 0.1$					$\text{VAR}(R_m) = 0.04$
					$\sigma(R_m) = 0.2$

26) Weston, J. Fred., "Investment Decisions Using the Capital Asset Pricing Model", *Financial Management*, Spring 1973, pp. 25-27.

27) 森昭夫・後藤幸男・小野二郎編『最適経営財務』(第5章 柳原茂樹稿), 81-84頁, 有斐閣. 柴川林也, 前掲書, 141-143頁.

28) Weston J. Fred., *op. cit.*, pp. 27-29.

表 7 四つのプロジェクトの期待収益率と共分散

(1) 各プロジェクト	(2) $P_s$	(3) $R_i$	(4) $PR_i$	(5) $[R_i - E(R_i)]$	(6) $[R_m - E(R_m)]$	(7) $P[R_i - E(R_i)]$ $[R_m - E(R_m)]$
#1	0.1	-0.46	-0.046	-0.50	-0.4	0.02
	0.2	-0.26	-0.052	-0.30	-0.2	0.012
	0.3	0.46	0.138	0.42	0	0
	0.4	0.00	0.000	-0.04	0.2	-0.0032
			$E(R_1) = 0.040$			$\text{COV}(R_1, R_m) = 0.0288$
#2	0.1	-1.00	-0.10	-1.2	-0.4	0.048
	0.2	-0.50	-0.10	-0.7	-0.2	0.028
	0.3	0	0	-0.2	0	0
	0.4	1.00	0.4	0.8	0.2	0.064
			$E(R_2) = 0.20$			$\text{COV}(R_2, R_m) = 0.14$
#3	0.1	-0.4	-0.04	-0.6	-0.4	0.024
	0.2	-0.2	-0.04	-0.4	-0.2	0.016
	0.3	0	0	-0.2	0	0
	0.4	0.7	0.28	0.5	0.2	0.04
			$E(R_3) = 0.20$			$\text{COV}(R_3, R_m) = 0.08$
#4	0.1	-0.4	-0.04	-0.5	-0.4	0.02
	0.2	-0.2	-0.04	-0.3	-0.2	0.012
	0.3	0.6	0.18	0.5	0	0
	0.4	0	0	-0.1	0.2	-0.008
			$E(R_4) = 0.10$			$\text{COV}(R_4, R_m) = 0.024$

$E(R_m)$  は、各状態の確率とそれに関連した市場収益率とを乗じて合計したものであり、10%となる((3)列)。また、市場収益率の分散は、(4)列から(6)列に示されているように、各々の状態のもとでの収益率から期待収益率を差し引いた値を2乗し、それに確率を掛け合計したものである((6)列)。

表7では、個々のプロジェクトの投資収益率の期待値とその共分散にも、同様な手続きで計算が行なわれる。すなわち、個々のプロジェクトの投資収益率の期待値は、各状態の確率にそれに関連した予想収益率を掛け合計したものである((4)列)。また、四つのプロジェクトの共分散は、各プロジェクトの収益率の偏

差と市場収益率の偏差を乗じたものを合計することによって計算される((7)列)。

表8では、個々のプロジェクトの投資収益率と市場収益率との共分散を、市場収益率の分散で割ることによって、すなわち、

表 8 ベータの計算

$\beta_1 = 0.0288/0.04 = 0.72$
$\beta_2 = 0.14/0.04 = 3.5$
$\beta_3 = 0.08/0.04 = 2.0$
$\beta_4 = 0.024/0.04 = 0.6$

表 9 超過収益率の計算

(1) 各プロジェクト	(2) 必要収益率 $R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_i$	(3) 期待収益率 $E(R_i)$	(4) 超過収益率
#1	$E(R_1) = 0.04 + (0.1 - 0.04)0.72 = 0.083$	0.04	-0.043
#2	$E(R_2) = 0.04 + (0.1 - 0.04)3.5 = 0.25$	0.2	-0.05
#3	$E(R_3) = 0.04 + (0.1 - 0.04)2.0 = 0.16$	0.2	0.04
#4	$E(R_4) = 0.04 + (0.1 - 0.04)0.6 = 0.076$	0.1	0.024

$$\beta_i = \frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\text{VAR}(R_m)}$$

によって、各プロジェクトのベータが計算された。 $\beta_i$  の値がわからると、CAPM を用いて各プロジェクトの必要収益率を、表 9 の(2)列のように見積ることができる。次に、個々のプロジェクトの期待収益率 ((3)列) から必要収益率 ((2)列) を控除して、超過収益率を(4)列のように計算することができる。MPR 基準では、この超過収益率がプラスのプロジェクトが承認される

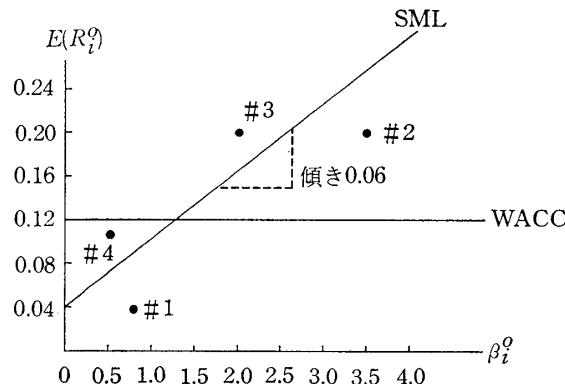


図 12 MPR 基準の適用例

(#3と#4)。それは MPR 線よりも上に表わされる。他方、超過収益率がマイナスの場合は却下され (#1と#2)、それは MPR 線よりも下に示される (図12参照)。しかし、WACC 基準では、#3と#2 が承認されるので、#2 と #4 については、いずれの基準を利用するかで、衝突した結果を生むことになる。異なったリスクをもつプロジェクトは、異なったリスク・クラスにあるということが、正当なものとして議論される。したがって、ここで WACC 基準を利用することは不合理である。

次に、ゼネラル・モータース (GM) の自己資本コストを計算することにするが<sup>29)</sup>、それには、まず、市場収益率を計算しなければならない。表10では、スタンダート・アンド・プアーズ社 (S & P) の 500 銘柄の株価指数が示され<sup>30)</sup>、それによって、各年度の株価変化率 ((3)列) と配当利回り ((4)列) が示され、市場収益率が計算されている ((5)列)。また、市場収益率の分散は(7)列に示されている。次に、GMのベータを計算しなければならないが、GMの投資収益率の平均 ( $\bar{R}_i$ ) は、表 11 の(5)列に表わされているように、およそ 10.2% である。したがって、 $\beta$ (ベータ)は、共分散

(表11の(8)列) を市場収益率の分散 (表10の(7)列) で割って、 $\frac{\text{COV}(R_i, R_m)}{\text{VAR}(R_m)} = \frac{0.008}{0.0096} = 0.83$  と求める。

さらに、GM の自己資本コスト (必要収益率) は、CAPM を用いると、

$$\begin{aligned} E(R_i) &= R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i \\ &= 0.044 + (0.078 - 0.044) 0.83 = 0.072 \end{aligned}$$

7.2% となる<sup>31)</sup>。

#### 4. キャッシュ・フローにおける費用構造の比較

資本予算問題に CAPM を適用する事例は、前述の 3. 投資決定と資本コストで論じられたが、そこでは、各プロジェクトの投資収益率と市場収益率の確率的予測を前提として展開してきた。しかし、ここでは、キャッシュ・フローをその構成要素に分解した議論を取り扱う。それは、機械の取替問題にみられるように、二つの相互に排他的なプロジェクトがあり、同一の収益の流れをもっているが、費用が異なっているというようなケースである。この場合、正しいアプローチは、プロジェクトのリスクがより大きいとき、低い利子率で期待費用を割り引くことである。この結果をみるために、単一期間のケースを想定する。まず、営業活動からの税引後キャッシュ・フローは、次式のように示される。

$$\widetilde{CF} = (\widetilde{S} - \widetilde{VC})(1 - \tau) + \tau \text{ dep}$$

$CF$  : 資本予算目的のための税引後キャッシュ・フロー

$S$  : 期末収益

$VC$  : 期末変動キャッシュ費用

$\tau$  : 法人税率

$\text{dep}$  = 減価償却費

投資額を  $I_0$  とした場合、プロジェクトの投資収益率は、次のようにになる。

$$\bar{R}_i = \frac{(\widetilde{S} - \widetilde{VC})(1 - \tau) + \tau \text{ dep} - I_0}{I_0} \quad (22)$$

プロジェクトが当該期間中に完全に減価償却されるということを仮定するならば、 $I_0 = \text{dep}$  となり、次のように展開される。

$$\begin{aligned} \bar{R}_i &= \frac{(\widetilde{S} - \widetilde{VC})(1 - \tau) - I_0(1 - \tau)}{I_0} \\ &= \frac{1 - \tau}{I_0} \widetilde{S} - \frac{1 - \tau}{I_0} \widetilde{VC} - (1 - \tau) \end{aligned}$$

確率変数の属性を用いると、プロジェクトの収益率

29) *Ibid.*, pp. 29-32.

30) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., *op. cit.*, p. 192.

31) 柴川林也、前掲書、154-156 頁。

表 10 市場パラメータの見積り

(1) 年度	(2) S & P 500社 株価指數 $P_t$	(3) 株価変化率 $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$	(4) 配当利回り $\frac{D_t}{P_t}$	(5) 市場収益率 $\frac{(3)+(4)}{R_m}$	(6) 市場収益率の偏差 $\frac{(5)-\bar{R}_m}{R_m-\bar{R}_m}$	(7) 市場収益率の分散 $\sigma^2(R_m)$ $(R_m-\bar{R}_m)^2$	(8) $R_f$
1960	55.85						
1961	66.27	0.1866	0.0298	0.2164	0.1384	0.0192	0.03
1962	62.38	-0.0587	0.0337	-0.025	-0.103	0.0106	0.03
1963	69.87	0.1201	0.0317	0.1518	0.0738	0.0054	0.03
1964	81.37	0.1646	0.0301	0.1947	0.1167	0.0136	0.04
1965	88.17	0.0836	0.03	0.1136	0.0356	0.0013	0.04
1966	85.26	-0.033	0.034	0.001	-0.077	0.0059	0.04
1967	91.93	0.0782	0.032	0.1102	0.0322	0.001	0.05
1968	98.70	0.0736	0.0307	0.1043	0.0263	0.0007	0.05
1969	97.84	-0.0087	0.0324	0.0237	-0.0543	0.0029	0.07
1970	83.22	-0.1494	0.0383	-0.1111	-0.189	0.0357	0.06
				0.7796/10 $\bar{R}_m=0.078$		0.0963/10 $\text{VAR}(R_m)=0.0096$	0.44/10 $\bar{R}_f=0.044$

表 11 GM の共分散

(1) 年度	(2) GMの 株価 $P_t$	(3) 株価変化率 $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$	(4) 配当利回り $\frac{D_t}{P_t}$	(5) 投資収益率 $\frac{(3)+(4)}{R_i}$	(6) 投資収益率の偏差 $\frac{(5)-\bar{R}_i}{R_i-\bar{R}_i}$	(7) 投資収益率の分散 $\frac{(\sigma)^2}{(R_i-\bar{R}_i)^2}$	(8) 市場との共分散 $\frac{(R_i-\bar{R}_i)}{(R_m-\bar{R}_m)}$
1960	48						
1961	49	0.02	0.05	0.07	-0.03	0.0009	-0.0042
1962	52	0.06	0.06	0.12	0.02	0.0004	-0.0021
1963	74	0.42	0.05	0.47	0.37	0.1369	0.0273
1964	90	0.22	0.05	0.27	0.17	0.0289	0.0198
1965	102	0.13	0.05	0.18	0.08	0.0064	0.0028
1966	87	-0.15	0.05	-0.10	-0.20	0.04	0.0154
1967	78	-0.10	0.05	-0.05	-0.15	0.0025	-0.0048
1968	81	0.04	0.05	0.09	-0.01	0.0001	-0.0003
1969	74	-0.09	0.06	-0.03	-0.13	0.0169	0.0071
1970	70	-0.05	0.05	0	-0.10	0.01	0.0189
				1.02/10 $\bar{R}_i=0.102$		0.243/10 $\text{VAR}(R_i)=0.0243$	0.0799/10 $\text{COV}(R_i, R_m)=0.008$

と市場ポートフォリオの収益率との共分散は、次式のようになる。

$$\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) = \frac{(1-\tau)}{I_o} \text{COV}(\tilde{S}, \tilde{R}_m) - \frac{(1-\tau)}{I_o} \text{COV}(\tilde{VC}, \tilde{R}_m) \quad (23)$$

式(23)は、プロジェクトの共分散リスクが、次の二つの部分に分けられるということを示している。すなわち、その収益の流れの共分散リスクと費用の流れの共分散リスクである。式(23)は、両辺を市場収益率の分散で割ることによって、組織的リスクのタームで

示すことができる<sup>32)</sup>。

$$\beta_i = \left( \frac{1-\tau}{I_o} \right) \beta_{is} - \left( \frac{1-\tau}{I_o} \right) \beta_{iVC} \quad (24)$$

$\beta_i$  : プロジェクトの組織的リスク

$\beta_{is}$  : 収益の流れの組織的リスク

$\beta_{iVC}$  : 変動費用の流れの組織的リスク

今、表12のように、収益の流れは同一であるが、費用が異なる、二つの相互に排他的なプロジェクトがあ

32) Copeland, Tomas E., and Weston, J. Fred., op. cit., pp. 259-260.

表 12 費用のリスクが異なるプロジェクト

(1) 状態	(2) 確率 $P$	(3) $\tilde{R}_m$	(4) $R_f$	プロジェクト 1				プロジェクト 2			
				(5) $\tilde{S}_1$	(6) $\widetilde{VC}_1$	(7) $\widetilde{CF}_1$	(8) $\tilde{R}_1$	(9) $\tilde{S}_2$	(10) $\widetilde{VC}_2$	(11) $\widetilde{CF}_2$	(12) $\tilde{R}_2$
1	0.33	0.26	0.04	610	500	105	0.05	610	495	107.5	0.075
2	0.33	0.14	0.04	600	470	115	0.15	600	500	100	0
3	0.33	0.20	0.04	610	520	95	-0.05	610	505	102.5	0.025

表 13 統計的諸結果

	平均			$R_m$ との共分散			ベータ ( $\beta$ )		
	$R$	$S$	$VC$	$R$	$S$	$VC$	$R$	$S$	$VC$
プロジェクト 1	0.05	606.66	496.67	-0.002	0.2	0.6	-0.833	83.33	250
プロジェクト 2	0.033	606.66	500	0.0015	0.2	-0.1	0.625	83.33	-41.67
市場収益率	0.2	—	—	0.0024	—	—	1	—	—

表 14 割引率と修正ベータ

	割引率			修正ベータ ( $\beta$ )		
	$CF$	$S$	$VC$	$CF$	$S$	$VC$
プロジェクト 1	-9.33%	10.67%	-16%	-0.833	0.4167	-1.25
プロジェクト 2	14%	10.67%	7.33%	0.625	0.4167	0.2083

るとしよう。投資額  $I_0$  を 100 ドル、法人税率  $\tau$  を 50% とすると、各プロジェクトの収益率  $R_i$  は、式(22)を用いて(8)列と(12)列のように示される。表12のキャッシュ・フローを検討すると、収益の流れは市場収益率と正の相関にあり、変動費の流れもそうであるということがわかる。しかしながら、プロジェクト 1 の変動費の流れと市場収益率との相関は非常に強いために、プロジェクト 1 のキャッシュ・フロー  $CF_1$  と市場収益率の相関は負になる。このことは、第 1 のプロジェクトのリスクが高くなればなるほど、そのキャッシュ費用は低い利子率で割り引かれるべきことを要求する。表13は、危険調整収益率の計算のために必要なさまざまな統計的結果を示している。プロジェクト 1 について考察すると、投資収益率  $R_1$  と市場収益率  $R_m$  の共分散は次のようにして計算される。

$$\begin{aligned} \text{COV}(R_1, R_m) &= (0.05 - 0.05)(0.26 - 0.2) \times 0.33 \\ &\quad + (0.15 - 0.05)(0.14 - 0.2) \\ &\quad \times 0.33 + (-0.05 - 0.05)(0.2 \\ &\quad - 0.2) \times 0.33 = -0.002 \end{aligned}$$

また、市場収益率の分散  $\text{VAR}(R_m)$  は、

$$\text{VAR}(R_m) = (0.26 - 0.2)^2 \times 0.33 + (0.14 - 0.2)^2$$

$$\times 0.33 + (0.2 - 0.2)^2 \times 0.33 = 0.0024$$

となる。したがって、ベータ ( $\beta_1$ ) は、

$$\beta_1 = -0.02 / 0.0024 = -0.833$$

となる。CAPM を用いて、キャッシュ・フローの割引率を求めるとき、

$$\begin{aligned} E(R_i) &= R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i \\ &= 0.04 + [0.2 - 0.04] \times (0.833) = -0.0933 \end{aligned}$$

となる。これは表14の 1 列に示されている。

収益の流れの組織的リスクは、

$$\beta_{1S} = 0.2 / 0.0024 = 83.33 \text{ となり、}$$

費用の流れの組織的リスクは、

$$\beta_{1VC} = 0.6 / 0.0024 = 250 \text{ となる。}$$

さらに、修正ベータは、式 (24) を用いて、

$$\begin{aligned} -0.833 &= \left( \frac{1 - 0.5}{100} \right) 83.33 - \left( \frac{1 - 0.5}{100} \right) 250 \\ &= 0.4167 - 1.25 \end{aligned}$$

となる。これは表14の 5 列と 6 列に示されている。

また、費用の流れの割引率は、CAPM を用いると、 $0.04 + [0.2 - 0.04] \times (-1.25) = -0.16$  となる。したがって、費用の流れは、-16% で割り引かれるべきである。図13は、CAPM によって与えられた証券市場線

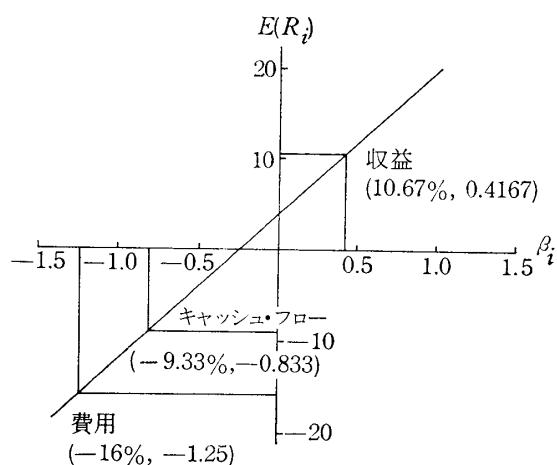


図 13 プロジェクト 1 の組織的リスクと必要收益率

を示したものである。プロジェクト 1 について、キャッシュ・フローを負の收益率で割り引くことは、通常のケースではない。否むしろ、現実のプロジェクトは、ほとんどつねに市場と正の相関をもっている。プロジェクト 2 については、費用の流れは 7.33% で割り引かれるべきである。かくして、我々は、キャッシュの流れの危険が高くなるほど、低い利子率で割り引かるべきであるという結果を示した。プロジェクト 2 について、必要收益率が 14% であるのに対して、期待收益率は 3.3% にすぎない。それゆえに、プロジェクト 2 はいかなる状況のもとでも承認されない。このことは、両方のプロジェクトについていえることである。収益を完全に無視し、より低い割引費用をもつプロジェクトを選択する実務家は、マイナスの NPV をもつプロジェクトを承認してしまうかもしれない。したがって、収益の流れを完全に無視することは得策ではない。費用は物語の半分を告げるにすぎない。もしも、意思決定者が、相互に排他的なプロジェクトがプラスの正味現在価値をもっているということを確信しないならば、費用比較だけを基礎にした意思決定は不適当である<sup>33)</sup>。

## VI CAPM とインフレーション

これまでの CAPM は、不確実なインフレーションを考慮していなかった。ここでは、チェン=ボネスの論文を取り上げ、不確実なインフレーションの存在が、企業の投資決定に、いかに影響を及ぼすかということを検討する<sup>34)</sup>。チェン=ボネスは、V の 3. 投資決定

33) *Ibid.*, pp. 261-262.

34) Chen, A.H., and Boness, A.H., "Effects of Uncertain Inflation on the Investment and Financing Decisions", *The Journal of Finance*, May 1975. 柴川林也, 前掲書, 222-229 頁.

と資本コストで論述したウェストンおよびルビンシャーの論文をさらに発展させた<sup>35)</sup>。ここで、再び CAPM の公式を示すと、次のようにある。

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \lambda \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) \quad (17)$$

一般に、投資決定の判断基準として、内部收益率が資本コストよりも大きい場合に、当該プロジェクトが承認された。それは、式 (20) および式 (21) で示された。

$$E(\tilde{R}_i) > R_f + \lambda \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)$$

もしも、 $\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) > 0$  ならば、次のようになる。

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - R_f}{\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)} > \lambda \quad (21)$$

この場合、 $\lambda$  は、すべての企業およびすべてのプロジェクトにとって適切な「リスク標準化資本コスト」と解釈される。そして、チェン=ボネスは、不確実なインフレーションを考慮した場合、結論として次のような式を示している<sup>36)</sup>。

$$E(R_i) > R_f + \lambda^* [\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)] \quad (25)$$

ただし、

$$\lambda^* = \frac{S}{\sum_j \frac{1}{2C_j} - \left\{ W[1 + R_f - E(\tilde{R}_c)] + S[E(\tilde{R}_m) - R_f] \right\}} \quad (26)$$

$$g = W/S = 1 + B/S$$

この場合、

$S$  : すべての株式の市場価値の合計

$B$  : すべての社債の市場価値の合計

$W$  : 証券への投資額合計

$\tilde{R}_i$  :  $i$  株式の名目的投資收益率

$R_f$  : 社債の名目的なリスクのない利子率

$\tilde{R}_c$  : 確率的インフレ率

また、 $C_j$  は危険回避係数で、 $C_j > 0$  である。もしも、 $[\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)]$  ならば、式 (25) は、次のようになる。

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - R_f}{\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)} > \lambda^* \quad (27)$$

$\lambda^*$  は「不確実なインフレーションのもとでのリスク標準化資本コスト」と解釈される。いま、V の 3. で論述されたウェストンのモスティン社の事例（表 5）を、前述の議論にあてはめることにする。市場パラメ

35) Rubinstein, Mark E., "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory", *The Journal of Finance*, March 1973.

36) Chen, A.H., and Boness, A.H., *op. cit.*, pp. 469-475.

表 15 市場パラメータとインフレ率

(1) $P_s$	(2) $R_m$	(3) $PR_m$	(4) $R_m - E(R_m)$	(5) $P[R_m - E(R_m)]^2$	(6) $\tilde{R}_c$	(7) $PR_c$
0.1	-0.3	-0.03	-0.4	0.016	0.05	0.005
0.2	-0.1	-0.02	-0.2	0.008	0.06	0.012
0.3	0.1	0.03	0	0	0.07	0.021
0.4	0.3	0.12	0.2	0.016	0.08	0.032
$E(R_m) = 0.1$			$VAR(R_m) = 0.04$			$E(R_c) = 0.07$

表 16 各プロジェクトの期待収益率とインフレ率との共分散

(1) 各プロジェクト	(2) $P_s$	(3) $R_i$	(4) $PR_i$	(5) $P[R_i - E(R_i)]$ $[R_m - E(R_m)]$	(6) $P[R_i - E(R_i)]$ $[R_c - E(R_c)]$
#1	0.1	-0.46	-0.046	0.02	0.001
	0.2	-0.26	-0.052	0.012	0.0006
	0.3	0.46	0.138	0	0
	0.4	0	0	-0.0032	-0.00016
	$E(R_1) = 0.04$			$COV(R_1, R_m) = 0.0288$	$COV(R_1, R_c) = 0.00144$
#2	0.1	-1.0	-0.1	0.048	0.0024
	0.2	-0.5	-0.1	0.028	0.0014
	0.3	0	0	0	0
	0.4	1.0	0.4	0.064	0.0032
	$E(R_2) = 0.2$			$COV(R_2, R_m) = 0.14$	$COV(R_2, R_c) = 0.007$
#3	0.1	-0.4	-0.04	0.024	0.0012
	0.2	-0.2	-0.04	0.016	0.0008
	0.3	0	0	0	0
	0.4	0.7	0.28	0.04	0.002
	$E(R_3) = 0.2$			$COV(R_3, R_m) = 0.08$	$COV(R_3, R_c) = 0.004$
#4	0.1	-0.4	-0.04	0.02	0.001
	0.2	-0.2	-0.04	0.012	0.0006
	0.3	0.6	0.18	0	0
	0.4	0	0	-0.008	-0.0004
	$E(R_4) = 0.1$			$COV(R_4, R_m) = 0.024$	$COV(R_4, R_c) = 0.0012$

ータとインフレ率は、表15に示されている。ただし、投資家は2人しかいないと仮定して、危険回避係数は、 $C_1=1/6$ 、 $C_2=1/7$ とする。すると、

$$\sum_j \frac{1}{2C_j} = 1/(1/6 + 1/7) \times 2 = 1.6155 \text{ となる。}$$

また、 $S=0.6$ 、 $B=0.4$ 、 $R_f=0.04$ とする。

$$g = 1 + B/S = 1 + 0.4/0.6 = 1.67$$

四つのプロジェクトの期待収益率と市場収益率およびインフレ率との共分散は、表16の通りである。表16の(5)列までは、表7を再び示したものである。また、表16の(6)列は、各プロジェクトの収益率の偏差（表7

の(5)列）とインフレ率の偏差（表15の(6)列と(7)列）を乗じたものに確率を掛けて合計する。 $\lambda^*$ は式(26)を用いて計算される。

$$\lambda^* = \frac{0.6}{1.6155 - \{(1+0.04-0.07)+0.6(0.1-0.04)\}} = 0.9844$$

さらに、式(27)の左辺を各プロジェクトごとに計算すると、次のようになる。

$$\#1 \quad \frac{0.04-0.04}{0.0288-1.67 \times 0.00144} = 0$$

$$\#2 \quad \frac{0.2-0.04}{0.14-1.67 \times 0.007} = 1.247$$

$$\#3 \quad \frac{0.2 - 0.04}{0.08 - 1.67 \times 0.004} = 2.1822$$

$$\#4 \quad \frac{0.1 - 0.04}{0.024 - 1.67 \times 0.0012} = 2.7278$$

したがって、式(27)から、#2と#3と#4は、 $\lambda^*$ よりも大きいので、承認されることになる。他方、インフレを考慮しない場合は、#3と#4が採用に値した。以上の関係を図に示すと、図14のようく表わされる。か

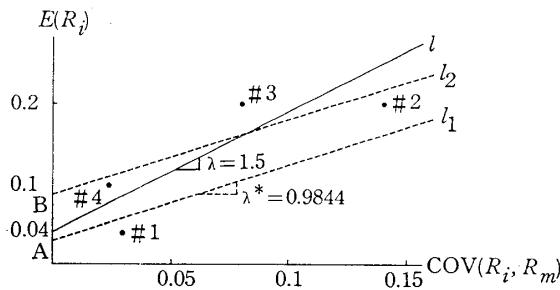


図 14 インフレ下におけるプロジェクトの選択

くして、もしも不確実なインフレが期待されるならば、CAPM のもとで導かれた  $\lambda$  は、真実のリスク標準化資本コストを過大表示することになる。すなわち、以上の事例では、 $\lambda$  は 1.5 であったが、 $\lambda^*$  は 0.9844 であり、インフレ期ではつねに  $\lambda^* < \lambda$  の関係となる。それゆえに、不確実なインフレが期待される場合、投資の判断基準として  $\lambda$  を用いると、企業による投資合計の水準は、保証されるというよりも低くなる傾向がある。逆に、デフレーションの場合は、 $\lambda$  は真実のリスク標準化資本コストを過少表示し、投資合計の水準は高くなる傾向がある。インフレ下におけるプロジェクトの選択基準は図14で示されたが、そこには、 $l$  以外に、二つの市場線  $l_1$  と  $l_2$  がある。そして、それらは同じ傾きをもっている。 $l_1$  はインフレ選好型のものであり、 $\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c) > 0$  の場合にみられる。 $l_2$  はインフレ回避型のものであり、 $\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c) < 0$  の場合である。 $l_1$  は  $A = R_f - \lambda^* g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)$  で縦軸と交叉し、 $l_2$  は  $B = R_f + \lambda^* g |\text{COV}(R_i, R_c)|$  で縦軸と交叉

している<sup>37)</sup>。したがって、我々が想定したケースは、 $l_1$  のインフレ選好型であった。

さらに、新規プロジェクトが企業の現存の資産と同じリスクをもっているならば、企業の自己資本コスト  $ke^*$  は、投資決定の切捨率として利用される。その場合、

$$ke^* = E(\tilde{R}_i) = R_f + \lambda^* [\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)]$$

となることはいうまでもない。これは、 $M=M$  の研究において、広範に論じられてきた規模拡張投資プロジェクトの特殊ケースである。相互に排他的なプロジェクトの選択と資本配分の問題は、均衡 CAPM の枠内で容易に処理される。たとえば、相互に排他的な二つのプロジェクト間において、期待危険調整正味将来価値が高ければ高いプロジェクトほど、

$I_i \{E(\tilde{R}_i) - R_f - \lambda^* [\text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) - g \text{COV}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_c)]\}$  は高くなり、採用されることになる。

## む　す　び

これまで、本稿では、主にコーブランドニウェストンの所説を中心として、ポートフォリオ理論の基礎から CAPM へ、さらに CAPM の応用へと論述し、最後に、チェン＝ボネスの CAPM とインフレーションとの関係について考察してきた。CAPM は、すでに述べた通り、さまざまな非現実的な仮定のもとでの議論であり、それゆえに、限界があることは免れない。それにしても、CAPM が現代財務理論の骨組に与えた影響があまりにも大であるということは、紛れもない事実であり、今後の発展が期待されるところである。本稿では、資本構成と資本コストに関連して CAPM による  $M=M$  命題の導出や、多期間 CAPM など、論述できなかった部分も多々あり、さらに、OPM など残した課題もあるが、それらは別の機会に述べてみようと思っている。

37) *Ibid.*, pp. 476-477.