《論　文》

新古典派成長理論における均衡成長
— Centralized and Decentralized Growth Model —

目　黒　徹　郎*

Economic Growth in the Neo-Classical View
—Centralized and Decentralized Growth Model—

TETSUO MEGURO

キーワード
経済成長（economic growth），新古典派（neo-classical），最適制御（opitmal control）

1　はじめに

近年のマクロ経済学は動学的分析抜きには語ることができなくなっている。そこでの土台となるのは，代表的個人の動学的効用最大化を伴った新古典派的成長理論である。それ以前の「新古典派成長論」の代表例はSolow-Swan モデルであり，Harrod-Domarによる資本主義の行く末に悲観的な見通しを持つモデルに対して，生産要素の投入の代替の可能性性を強調することで，資本主義のもとでも，「安定的な成長」(steady state)の維持が可能であることを強調する色彩が強かった。

それだけに，そうした初期の「新古典派成長モデル」はともすれば，Keynesの土俵で議論を展開することを余儀なくされた。その典型例は，代表的家計の消費支出の算出である。これらは，外生的に与えられた消費関数のもとで，機械的に消費支出を計算するというあまり現実的ではない想定の上に立脚している。

しかしながら，消費支出は家計が，自らのライフプランのもとに，自らの意思で決定すべき性質のものである。その意味で，個別の家計の意思決定を含んだ，動学的意思決定モデルが必要であった。

幸いにして，そうした枠組みでマクロ成長論を論ずる土台も形成されてきた。ただし，これらも必ずしも両手を上げて賛意を示すことができるものではない。

なぜなら，これも前述の新古典派成長理論がおかした，間違いを一部継承しているものがあるということである。それは，「最適成長」を論ずる際に，分析者自らがsocial planner の立場に身をおいて論ずることが数多く行われてきた，ということである。

ここでsocial planner とは，家計の消費・貯蓄行動および企業の生産・投資（資本蓄積）行動を同時かつ統合的にコントロールして経済厚生の最大化を測る存在である。そこで展開されるモデルは，いわば集権的な(centrarized)経済における動学的成長理論であるといえる。

しかし，本来は，(集計されながらも)家計と企業はそれぞれ独自の目的を追求し，その上で市場均衡の下で，経済成長がどのような姿なのかを問わなければならない。つまり分権的(decentrarized)な均衡動学的成長理論が必要とされているのである。

本稿では，その動きを見つつ，その中でともすれば混同されがちな「集権化された成長理

＊　流通経済大学経済学部，e-mail: meguro@rku.ac.jp

論」と「分権的な成長理論」の相違点と同一視して良い点を見定めるためのフレームワークを構築構成とそこで仮定されている事項の整理をすることは意味のないことではないと考える。

以下では，その２つの見方を示すモデルを提示して，その問題点を探ることにする。

2　モデル

2.1　時間

このモデルでは時間 t は連続的に測られるとし，$t \in [0, T]$ であるとする。代表的家計を仮定し，代表的家計はやはり $[0, T]$ の期間継続し，その消費から得られる効用の現在価値の和を最大化することを目的とするとする。家計は労働力と資産を保有，それらが企業に提供され，それぞれの報酬が家計の所得の源泉となる。資産は直接企業に貸し出されるものとし，貯蓄が，金融仲介システムを通じて企業に貸し出されるプロセスは明示的には扱われない。

さらに，代表的企業を仮定し，代表的企業も同一期間継続し，利潤の現在価値の総和を最大化することを目的とすると仮定される。代表的企業は家計から労働を雇用して賃金を支払い，家計から直接資産を借り入れ投資の原資とし，資本レンタル料 $r(t)$ を支払う。

2.2　マクロ生産関数

いま t 時点の国民所得を $Y(t)$，t 時点の集計された資本ストックを $K(t)$，t 時点の労働投入量を $L(t)$ と表記し，マクロ生産関数は

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{1}$$

と表されるとする。このマクロ生産関数(1)は次の仮定を満たすとする。

P１：桃源郷の不可能性

$$F(0, 0) = 0 \tag{2}$$

P２：増加関数

$K' \geqq K, L' \geqq L$ ならば

$$F(K', L') \geqq F(K, L) \tag{3}$$

$K' > K, L' > L$ ならば

$$F(K', L') > F(K, L) \tag{4}$$

P３：１次同次性

任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda F(K, L) = F(\lambda K, \lambda L) \tag{5}$$

P４：凹関数　$F(K, L)$ の投入物に関する限界正値性と逓限性。すなわち次が成立する。

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \tag{7}$$

P５：稲田条件　ここでは，有名な稲田条件(Inada condition)を仮定する。すなわち次が成立する。

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty \quad \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty \tag{8}$$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty \quad \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty \tag{9}$$

P６：資本減耗　資本は生産活動の中で減耗していく。それは次の式で表される。減耗率 δ は絶対値で測られている。他の事情が一定ならば次が成り立つ。

$$\dot{K}(t) = e^{-\delta t} K(t) \tag{10}$$

2.2.1　一人当たりへの正規化

$Y = F(K, L)$ を一人当たりの変数を用いて書き換える。

$$k(t) := \frac{K(t)}{L(t)} \tag{11}$$

$$y(t) := \frac{Y(t)}{L(t)} \tag{12}$$

$$f(k(t)) := \frac{1}{L(t)}\ F(K(t)), L(t)) \tag{13}$$

2.2.2　労働者数

家計は０時点に初期的な労働 $L(0)$ を保有し，それを企業に提供して賃金所得を得る。労働人口は次の動学方程式に従って，増加すると

想定する。

$$L(t) = L(0)e^{nt} \tag{14}$$

ここでは第一時的接近として，労働供給は一人あたり賃金 w に対しては，非弾力的に供給されるとする。また同様に簡単化のために初期的な労働人口は $L(0) = 1$ であるとしよう。

2.2.3　代表的企業の利潤最大化

代表的企業の利潤は $\Pi = PY - RK - WL$ で与えられる。$Y = F(K, L)$ を代入して，利潤最大化条件を求めると次を得る。

$$F_K = R, \quad F_L = W \tag{15}$$

ここで P は一般物価をニューメレールとして，$P = 1$ を仮定することにする。

１次同次関数についてのオイラーの定理から，

$$Y = F_K K + F_L L \tag{16}$$

が成り立つので，$P = 1$ を想起すれば，これは最大利潤がゼロであることを意味する。

2.2.4　ふたたび一人当たりへの正規化

これら利潤最大化の条件を一人当たりに正規化してみる。まず次を確認する。

$$F_K = f'(k) \tag{17}$$

$$F_L = f(k) - kf'(k) \tag{18}$$

ここで(16)を用いた。

いま，基準化された代表的企業の労働者一人あたりの瞬間的利潤を π と書くことにすれば，

$$\pi = y - (r(t) + \delta)k - w(t) \tag{19}$$

を得る。また利潤最大化条件より，次を得る。

$$f'(k) = r(t) + \delta \tag{20}$$

$$f(k) - kf'(k) = w(t) \tag{21}$$

これは任意の時点で，代表的企業の最大化利潤がゼロであることを意味する。

2.2.5　家計

代表的家計の瞬間的財消費 $c(t)$ から得られる瞬間的効用効用 $u(c(t))$ の現在価値の総和を最大化すると想定される。この瞬間的財消費 $c(t)$ は一人あたりのタームで測られているとする。したがって，集計されたマクロの瞬間的消費支出 $C(t)$ は $C(t) = L(t)c(t)$ である。ここで瞬間的効用関数 $u(\cdot)$ について，次のような仮定を設ける。

U１：不変性　瞬間的効用 $u(\cdot)$ はモデルの時間を通じて変わらないとする。

U２：微分可能性　瞬間的効用 $u(\cdot)$ は二階連続微分可能であるとする。

U３：単調増加　瞬間的効用 $u(\cdot)$ は次を満たす。

$$u'(\cdot) > 0 \tag{22}$$

U４：限界効用逓減　瞬間的効用 $u(\cdot)$ は次を満たす。

$$u''(\cdot) < 0 \tag{23}$$

U５：稲田条件　瞬間的効用 $u(\cdot)$ は次の稲田条件を満たすとする。

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \tag{24}$$

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = 0 \tag{25}$$

U６：時間選好率の一定性　代表的家計の時間選好率はモデルの時間の中で一定であるとする。そこから計算される割引因子を ρ で表すことにする。

したがって，家計が最大化すべき効用の現在価値の和 U は次で表される。

$$U = \int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}e^{nt}dt \tag{26}$$

ここで，U が有限の値に収束するためには，次の追加的な仮定を設ける必要がある。

U７：割引因子と労働成長率の関係

それらは $\rho > n$ の関係にある。

家計は初期的に資産 $A(0)$ を持っており，そ

れを一人あたりのタームで$a(0)$と表すことにする。家計はこの資産を代表的企業に貸し出すことで収益を得る。その収益率は貯蓄を貸し出し，得ることができる利子率$r(t)$と同一である。したがって，家計の所得制約の動学方程式は次で表される。

$$\dot{A}(t)=r(t)A(t)+w(t)L(t)-C(t) \tag{27}$$

これを一人あたりのタームで示すと次のようになる。

$$\dot{a}(t)=r(t)a(t)+w(t)-c(t) \tag{28}$$

2.2.6　代表的企業の一人あたり資本の動学方程式

ここまでくれば，代表的企業の一人あたり資本の動学方程式を導くことができる。代表的企業の資本蓄積は，家計からの資産の借り入れ，(このモデルでは明示されていない金融仲介システムを通じた)貯蓄の借り入れによって増加する。しかしながら，資本は生産に使用されることで時間を通じて資本減耗を起こす。さらに一人あたりのタームになおす際には，労働人口の増加も考慮に入れなくてはならない。代表的企業の一人あたり資本$k(t)$の動学方程式は次で表される。

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{29}$$

3　Social Planner の問題

3.1　問題の定式化

ここまでくれば，social plannerが解くべき問題は次のように定式化される。

$$\max_{c(t)} U(0)=\int_0^T e^{-(\rho-n)t}u(c(t))dt \tag{30}$$

$$\text{s.t.}\quad \dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{31}$$

$$k(0)=k_0>0 \tag{32}$$

$$k(T)\mathrm{e}^{-r(T)T}\geqq 0 \tag{33}$$

これらの中で，$k(t)$はストック変数であり，そのようなストック変数の推移は，経済の発展の状態をを表現するので「**状態変数**」(state variable)と呼ばれ，これに対し消費$c(t)$などのフロー変数は，動的方程式を通じて状態変数の変動をコントロールするので，「**制御変数**(control variable)と呼ばれる。

問題の最後の式(33)は，「終末期$t=T$に残された資本ストックを，0期からT期までの利子率によって割り引いた現在価値は非負になること」を意味する。この制約の意味は深い。ここで制約式$k(T)e^{-r(T)T}\geqq 0$の意味を考えてみよう。このモデルは連続時間の有限期間モデルである。この式は途中で資本を取り崩して消費に充てることは可能であるが，行き過ぎた取り崩しによって計画期間の終了時に負債を抱えるようなことがあってはならないことを意味する。

3.1.1　動学問題のラグランジェ関数

この動学問題を動的ラグランジェ関数を定義してみよう。まずラグランジェ関数$\mathcal{L}(t, k(t), u(t), \mu(t), \nu)$を，次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(t, k(t), \mathrm{c}(t), \mu(t), \nu): \\
&=\int_0^T e^{-(\rho-n)t}u(c(t))dt \\
&+\int_0^T \{\mu(t)(f(k(t))-c(t) \\
&-(n+\delta)(t)-\dot{k}(t))\}dt+\nu k(T)e^{-r(T)T}
\end{aligned} \tag{34}$$

この(34)式の右辺第2項は各時点で成立する資本蓄積制約を集約して表記したものである。各時点にについてLagrange未定乗数$\mu(t)$が乗じられている。また第3項は計画期間終末$t=T$に関するNo-Ponzi-Game conditionであり，別のLagrange未定乗数νが乗じられている。

この式は以下のように変形が可能である。

$$\mathcal{L}(t, k(t), \mathrm{c}(t), \mu(\mathrm{t}), \nu)$$

$$= \int_0^T e^{-(\rho-n)t} u(c(t))dt$$

$$+ \int_0^T \{\mu(t)(f(k(t)) - c(t)$$

$$- (n+\delta)k(t))\} dt - \underbrace{\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt}_{(*)}$$

$$+ \nu k(T)e^{-r(T)T} \tag{35}$$

最終的には制御変数 $c(t)$ と状態変数 $k(t)$ についての1階の条件を導き出したい。しかし，$\dot{k}(t)$ を $k(t)$ で微分することには困難を伴う。したがって，(35)式の(＊)の部分に変換を施す。

3.1.2　(＊)部分の変形

まず関数の積の微分の公式を思い出そう。

$$\frac{d}{dt}\{\mu(t)k(t)\} = \dot{\mu}(t)k(t) + \mu(t)\dot{k}(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t)\dot{k}(t) = \frac{d}{dt}\{\mu(t)k(t)\} - \dot{\mu}(t)k(t) \tag{36}$$

(36)式の両辺を定積分すると次を得る。[*1]

$$\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt$$

$$= \underbrace{\int_0^T \left\{\frac{d}{dt}\{\mu(\mathrm{t})k(t)\right\} dt}_{(**)} - \int_0^T \dot{\mu}(t)k(t)dt \tag{37}$$

このうち，(＊＊)部分については以下の計算が可能である。

$$\int_0^T \left\{\frac{d}{dt}\{\mu(t)k(t)\right\} dt = [\mu(t)k(T)]_0^T$$

$$= \mu(T)k(T) - \mu(0)k(0) \tag{38}$$

この(38)式を(37)式に代入すると

$$\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt$$

$$= \mu(T)k(T) - \mu(0)k(0) - \int_0^T \dot{\mu}(t)k(t)dt \tag{39}$$

を得る。

＊1　(＊) に代入すると考えても良い。

3.1.3　書き換えられたLagrange関数

(39)式を(35)式に代入し，整理すると次を得る。

$$\mathscr{L}(t, k(t), c(t), \mu(t), \nu)$$

$$= \int_0^T \{e^{-(\rho-n)t} u(c(t)) + \mu(t)(fk(t))$$

$$- c(t) - (n+\delta)k(t))\} dt$$

$$+ \int_0^T (\dot{\mu}(t)k(t))dt$$

$$- \mu(T)k(T)) + \nu k(T)e^{-r(T)T}$$

$$+ \mu(0)k(0) \tag{40}$$

この(40)式の右辺第1項の中の被積分関数は特にハミルトニアン（Hamiltonian）$\mathscr{H}(\cdot)$ と呼ばれる。

$$\mathscr{H}(t, c(t), k(t), \mu(\mathrm{t})) := e^{-(\rho-n)t} u(c(t))$$

$$+ \mu(t)\{f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t)\} \tag{41}$$

Hamiltonianの経済学的解釈はラグランジェ関数と対応している。つまり，消費を通じた効用の増加だけでなく，**事前には**，貯蓄および資産の貸付(これらは投資額と同時に等しくなると考えられている)をshadow priceで評価した価値が与えられている。貯蓄および資産の貸付が増加すると資本蓄積が進んで将来の産出が増え，消費の増加を通じて効用が高まると期待されるからである。

(40)式の右辺第2項はどのように解釈できるであろうか。最適化問題におけるLagerange乗数は内生変数である。そして(40)式で表される最適化問題に現れる $\mu(t)$ も内生的に決定され，その解を時点順に並べるとその時間的推移がわかる。Hamiltonianの制約式に乗ぜられる変数(この場合は $\mu(t)$)を特に「**共役状態変数**」(costate variable)と呼ぶ。その役割はshadow priceを意味する。このケースでは制約式は資本蓄積制約である。したがって，shadow price $\mu(t)$ が意味するのは資本財の各々の時点での価格である。

したがって $\mu(t)$ の変動 $\dot{\mu}(t)$ は資本財の「時価の変動」を表す。つまり⑽式の右辺第２項

$$\int_0^T \dot{\mu}(t)k(t))dt \tag{42}$$

は，計画期間中における保有資本のキャピタルゲインないしロスの総和を評価しているといえる。

⑽式の右辺第３項および第４項はNo-Ponzi Gameの条件など特別な制約が加わる計画期間の終末期（$t=T$）について，他とは区別して取り扱っていることを示す。他方，第５項は外生的に与えられる資本の初期保有量を扱っている。

3.1.4　最適制御

Hamiltonianが定義されたので，このあとは最適制御（optimal control）の手法を通じて最適成長の動的軌道を求めることにしよう。

ここでの内生変数は，制御変数（control variable）$c(t)$，状態変数（state variable）$k(t)$，共役状態変数（costate variable）でありshadow priceである $\mu(t)$ である。

まず，制御変数 c（t）に関しては，Hamiltonian $\mathscr{H}$ を最大化していなければならない。したがって，$c(t)$ に関する１階の条件である次を満たしていなければならない。

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial c(t)}=0 \Rightarrow e^{-(\rho-n)t}u'(c(t))-\mu(t)=0 \tag{43}$$

さらに，$c(t)$ に関する２階の条件を求めると，

$$\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial c(t)^2} \Rightarrow e^{-(\rho-n)t}u''(c(t))<0 \tag{44}$$

となり，制御変数 $c(t)$ に関する条件は求められた。

次は，状態変数 $k(t)$ に関する条件である。

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial k(t)}+\dot{\mu}(t)=0$$

$$\Rightarrow \mu(t)(f'(k(t))-(n+\delta))-\dot{\mu}(t)=0 \tag{45}$$

最後に共役状態変数（costate variable）である $\mu(t)$ に関する条件である。

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mu(t)}=0$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{46}$$

⒀や⒂は内生的な動学変数とその時間に関する１階の微分方程式として導出される。[*2]

3.1.5　Transversality Condition と相補スラック性

横断条件（transversality condition）について考える。終末期 $t=T$ についての制約（No-Ponzi Game conditionを含む）については区別して扱っていた。この終末期の資本 $k(T)$ に関する１階の必要条件をもとの動学的lagrange関数を使って求めると以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k(t)}=-\mu(T)+ve^{-r(t)T}=0$$

$$\Rightarrow ve^{-r(T)T}=\mu(T) \tag{47}$$

制約条件が非拘束的となる最適化問題では，１階の条件だけではなく「**相補条件**」（相補スラック性（complementary slackness condition）とも）が重要な役割を果たす。この最適化問題では，No-Ponzi Game の条件が不等式制約になっている。このNo-Ponzi Gameの条件の相補条件は以下のようになる。

$$v\{k(T)e^{-r(T)T}-0\}=(ve^{-r(T)T})k(T)=0 \tag{48}$$

⒄に⒅を代入すると

$$\mu(T)k(T)=0 \tag{49}$$

を得る。この式は「**横断性条件**」（transversality condition）として知られる。横断性条件は「計画期間の終末期における相補スラック性」と解釈される。この条件が満たされるのは次のいずれかの場合である。

（Case i）：

$\mu^*(T)>0$ and $k^*(T)=0$

＊２　最後の式のみ，変換前の問題で解いた。$\dot{\mu}(\cdot)$ を $\mu(\cdot)$ で微分することの困難を回避するためである。

(Case ii)：

$\mu^*(T)=0$ and $k^*(T)\geqq 0$

(Case i)は，終末期($t=T$)における最適なshadow price(資本の限界価値)が正である($\mu^*(T)>0$)ならば，資本をすべて売却して消費に充てた方が高い効用を得られることを示す。したがってこのとき$k^*(T)=0$でなければならないことを示す。他方(Case ii)は，終末期における最適な資本ストックが非負であるならば($k^*(T)\geqq 0$)，資本を取り崩しても効用が増加しない(ないし低下する)状況が実現されていなければならない。効用の増加に貢献しない資本は無価値であるはずだから，このときのshadow priceはゼロでなければならない。よって，$\mu^*(T)=0$が成立しているはずである，という事を示す。

いま，(43)より，$\mu(T)$は以下のように表される。

$$\mu(t)=e^{-(\rho-n)t}u'(c(t))$$

$$\Rightarrow \mu(T)=e^{-(\rho-n)T}u'(c(T)) \tag{50}$$

この最適化問題では，「限界効用逓減」と「効用に関する稲田-likeな条件」が仮定されていることを考えると，$\mu(T)=0$となる，つまり(Case ii) が成立するのは，

1. 終末期$t=T$の消費が無限大となり，$u'=0$となる。
2. 計画期間Tが非常に長く，$e^{-\rho T}=0$となる。

のうち，少なくともいずれか一方が満たされている必要がある。最初の条件が満たされているためには，そもそも予算が無限大でなければならない。効用関数に関する稲田条件を考えると，これは考えにくい。したがって，$\mu(T)=0$のケースは後者の計画期間が非常に長い場合にほぼ限定されるとみてよいであろう。それ以外では(Case ii)が成立し，計画期間の終わりに資本を残さないことが最適となる。

3.1.6　1階の必要条件の意味

導出された1階の条件の意味を考えてみよう。(43)式，(45)式，(46)式で得られた1階の必要条件を整理すると次のようになる。

$$\mu(t)=e^{-(\rho-n)t}u'(c(t)) \tag{51}$$

$$\dot{\mu}(t)=-\mu(t)(f'(k(t))-(n+\delta)) \tag{52}$$

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{53}$$

ここで，$k(t)$に関しては資本の動学方程式(53)式によって既にその通時的な変動が記述されている。よって，我々は残された(51)式と(52)式とから，消費$c(t)$の通時的な動きを記述した式を導出する。

そのために，まず(51)式をtについて微分すると次を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(t)&=-(\rho-n)e^{-(\rho-n)t}u'(c(t))\\&\quad+e^{-(\rho-n)t}u''(c(t))c'(t)\\&=-(\rho-n)\underbrace{\{e^{-(\rho-n)t}u(c(t))\}}_{=\mu(t)\,\mathrm{by}\,(51)}\\&\quad+e^{-(\rho-n)t}\{u''(c(t))\dot{c}(t)\}\\&=-(\rho-n)\mu(t)+e^{-(\rho-n)t}\{u''(c(t))\dot{c}(t)\}\end{aligned} \tag{54}$$

(54)式を(52)式に代入して整理する。

$$\begin{aligned}&\{(f'(k(t))-\delta-\rho))\}\\&=\frac{-e^{-(\rho-n)t}\{u''(c(t))\dot{c}(t)\}}{\mu(t)}\end{aligned} \tag{55}$$

(55)式に(51)式を代入すると次を得る。

$$\begin{aligned}&(f'(k(t))-\delta-\rho)\\&=\frac{-e^{-(\rho-n)t}\{u''(c(t))\dot{c}(t)\}}{e^{-(\rho-n)t}u'(c(t))}\\&=\frac{\{u''(c(t))\dot{c}(t)\}}{u'(c(t))}=\frac{\{u''(c(t))c(t)\}}{u'(c(t))}\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right)\end{aligned} \tag{56}$$

以上を整理すると次を得る。

$$\begin{aligned}&(f'(k(t))-\delta-\rho)\\&=\rho-\underbrace{\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))}}_{(**)}\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right)\end{aligned} \tag{57}$$

これにより，$\dot{c}(t)$が明示的に現れ，かつ，shadow priceは消去された。(57)式の(＊＊)部分は，「限界効用の弾力性」$\sigma(t)$を意味する。マイナスがつくのは，絶対値で測っているためである。

$$\begin{aligned}\sigma(t):=-\frac{\left(\frac{du'(\cdot)}{u'(\cdot)}\right)}{\frac{dc}{c}}&=\frac{1}{u'(t)}\left(\frac{du'(\cdot)}{dc}\right)c\\&=-\frac{u''(\cdot)}{u'(\cdot)}c\end{aligned} \tag{58}$$

限界効用の弾力性$\sigma(t)$は，（効用単位で測った）「消費１%の増加から得られる限界的な収益率」と解釈できる。つまり(57)式が意味するのは，（資本からの実行収益率）=（割引率）+（消費の収益率）という事である。

仮に資本市場が競争的であれば，裁定条件により「貯蓄の利子率= 資本からの実行収益率」が成立していなければならない。これらを踏まえると(57)式は「１単位の予算を現時点の消費に充てること(右辺)と，(現時点での消費を我慢して)貯蓄に充てることによる収益が等しいこと」を意味する。「現在の消費がもたらす価値」が「将来の消費がもたらす価値」と等しいともいえる。つまり，最適な状態では「現在に消費することと将来に消費することが無差別になる」ともいえる。

3.1.7　資本・消費の動学方程式の導出

「限界効用の弾力性」は消費関数$c(t)$の形状や消費の水準によって異なる値を取る。ここでは効用関数$u(\cdot)$の形を特定化し，$\sigma(t)$が一定になるように工夫する。

$$u(c)=\frac{c^{(-\theta)}-1}{1-\theta}\quad(\theta>0,\ \theta\neq1) \tag{59}$$

これは相対的リスク回避度一定(CRRA)の効用関数として知られる。ここでは，リスクは関係しないが，curvatureを決めているのである。[＊3]

この効用関数のもとでは，限界効用の弾力性$\sigma(t)$は一定値θとなる。ここで，この特定化を適用すると(57)は以下のように書き換えることができる。

$$f'(k(t))-\delta=\rho+\theta\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right) \tag{60}$$

これを整理すると，

$$\dot{c}(t)=c(t)\frac{1}{\theta}(f'(k(t))-\delta-\rho) \tag{61}$$

ないしは

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}(f'(k(t))-\delta-\rho) \tag{62}$$

となり，消費の動学方程式が導出される。

これで，資本遷移式(53)と共に，消費の動学方程式も導出されたことになる。

$$\dot{c}(t)=c(t)\frac{1}{\theta}(f'(k(t))-\delta-\rho)\ \text{(62：再掲)}$$

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t)\ \text{(53：再掲)}$$

この連立微分方程式体系を解くことによって，問題の解が得られる。なお，この連立微分方程式で表される動学体系を「Ramsey モデル」[＊4]と呼ぶ。

この２つの微分方程式が，ここでの集権化された新古典派成長モデルを特徴付けている。

4　分権化された新古典派成長モデル

前節で述べたモデルは，social planerが解くべき新古典派成長モデルであった。それは，技

＊3　この関数型の特定化は，(58)式より，２階の積分を行って求められている。係数および加えられる定数が家計の行動に影響を与えない，増加変換であり，その上で結果の微分方程式がsimpleになるように選ばれているのはいうまでもない。

＊4　ベースとなるモデル構築したRamsey(1928)にちなむ。場合によっては，これを発展させたCas(1965)とKoopmans(1965)も加えて，Ramsey-Cas-Koopmansモデルと呼ぶ場合もある。

術・人々の選好は与件としながらも，自らの利益は追求しないという前提で，なおかつ消費と資本蓄積に関する意思決定を一つの立場で行い社会的な厚生を最大化するような立場─つまりsocial planerの立場に立って，問題を扱った場合の解である。

しかし，このようなアプローチは現実の経済の分析にあたっては，適切なものとはいえない。中央集権的な計画経済ならいざ知らず，市場経済においては，家計・企業は自らの利益に沿った行動を取ることの自由を持っていることが前提とされなければならない。つまり，意思決定はあくまで分権的に行われるのである。

モデルをそのように組み直すためには，家計・企業それぞれの「利己的な」行動を導き出し，それが市場で出会った時の結果としての均衡を求めるような枠組みで考えなければならない。

以下では，代表的家計・代表的企業それぞれの部門が行う動学的意思決定を叙述し，それが市場で出会った時の結果を吟味することにする。

4.1　代表的家計の動学的問題

分権的かつ動学的な経済における家計の目的は，期間を通じた効用の現在価値の和の最大化である。家計は，徐々に増えてゆく労働を供給しその対価として賃金収入を得るとともに，保有する資産(それは毎期消費されなかった所得の分だけふえてゆく)を供給し，その資本レンタル料を得て，それらの所得のもとで，効用最大化を図る。注意しなければならないのは，効用には割引ファクターが存在し，それを勘案して消費計画を立てねばならないということである。

前節までのモデル・notationを流用すると，代表的家計が解くべき問題は以下のように表現できる。

$$\max_{c(t)} U(0) = \int_0^T e^{-(\rho-n)t} u(c(t))\,dt \tag{63}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{a}(t) = w(t) + r(t)a(t) - c(t) \tag{64}$$

$$a(T)e^{-r(T)T} \geqq 0 \tag{65}$$

(65)は，計画期間終末 $t=T$ に関するNo-Ponzi-Game conditionである。ここで動学的ラグランジェ関数 $\tilde{\mathscr{L}}(t, a(t), u(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{\mu})$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathscr{L}}(t, a(t), c(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{\mu}):\\
&= \int_0^T e^{-(\rho-n)t} u(c(t))\,dt\\
&+ \int_0^T \tilde{\mu}(t)\{w(t) + t(t)a(t) - c(t) - \dot{a}(t)\}\,dt\\
&+ \tilde{\mu}\,a(T)\mathrm{e}^{-r(T)T}
\end{aligned} \tag{66}$$

ここで $\tilde{\mu}(t), \tilde{\mu}$ はそれぞれ，資産制約およびNo-Ponzi Game conditionに付される未定定数である。小節3.1.2において施した式の変形と同様の操作を行うと，上式は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathscr{L}}(t, a(t), c(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{\mu}):\\
&= \int_0^T e^{-(\rho-n)t} u(c(t))\,dt\\
&+ \int_0^T \tilde{\mu}(t)\{w(t) + r(t)a(t) - c(t)\}\,dt\\
&- \int_0^T \dot{\tilde{\mu}}(t)a(t)\,dt - \tilde{\mu}(T)a(T) + \tilde{\mu}(0)a(0)\\
&+ \tilde{\mu}\,a(T)\mathrm{e}^{-r(T)T}
\end{aligned} \tag{67}$$

4.2　家計のHamiltonian

上の定式化から，家計の動学的問題を表すHamiltonian $\tilde{\mathscr{H}}^H(t, c(t), a(t), \tilde{\mu}(t))$ は次のようになる。

$$\tilde{\mathscr{H}}^H(t, c(t), a(t), \tilde{\mu}(t)):$$

$$= e^{-(\rho-n)t}u(c(t))$$

$$+\tilde{\mu}(t)\{w(t)+r(t)a(t)-c(t)-\dot{a}(t)\} \tag{68}$$

ここで制御変数は $c(t)$ であり，状態変数は $a(t)$ である。最適制御の理論により，制御変数 $c(t)$ はHamiltonian $\tilde{\mathscr{H}}^H$ を最大化していなければならない。1階の条件は次で表される。

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}^H}{\partial c(t)} = 0 \Rightarrow e^{-(\rho-n)t}u'(c(t)) - \tilde{\mu}(t) = 0 \tag{69}$$

更に2階の条件を求めると，次を得る。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}^H}{\partial a(t)^2} = e^{-(\rho-n)t}u''(c(t)) < 0 \tag{70}$$

となり，制御変数 $c(t)$ に関する条件は求められた。

次に状態変数 $a(t)$ に関する条件である。

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}^H}{\partial c(t)} + \dot{\tilde{\mu}}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(t)r(t) - \dot{\tilde{\mu}}(t) = 0 \tag{71}$$

最後に共役状態変数 $\tilde{\mu}(t)$ に関する条件である。

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}^H}{\partial \tilde{\mu}(t)} = 0$$

$$\Rightarrow w(t)+r(t)a(t)-c(t)-\dot{a}(t) = 0 \tag{72}$$

ここで得られた，1階の条件を列記すると以下のようになる。

$$e^{-(\rho-n)t}u'(c(t)) - \tilde{\mu}(t) = 0 \qquad (69；再掲)$$

$$\tilde{\mu}(t)r(t) - \dot{\tilde{\mu}}(t) = 0 \qquad (71；再掲)$$

$$w(t)+r(t)a(t)-c(t)-\dot{a}(t) = 0 \qquad (72；再掲)$$

まず(69)式を t で微分すると次を得る。

$$-(\rho-n)e^{-(\rho-n)t}u'(c(t))$$

$$+e^{-(\rho-n)t}u''(c(t))\dot{c}(t) = \dot{\tilde{\mu}}(t) \tag{73}$$

さらに，先ほどと同様の効用関数の特定化を施し，(69)式および(71)を考慮すれば次を得る。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t)) - (\rho - n) \tag{74}$$

これは，家計の消費の動学的計画の軌道を表す微分方程式である。

4.3　代表的企業の動学的問題

分権的かつ動学的な経済における企業の目的は，計画期間を通じての利潤の現在価値の和の最大化であることは言うまでもない。しかしながら，本稿のモデルで採用された企業の技術条件―それは生産関数で示される―においては，企業は各期の労働人口を全員雇用し，家計から供給される資産のすべてを投資として受け入れ（もちろんその間には資本減耗もある），そのうえで各期の利潤を最大化した結果は常にゼロ利潤を得る。

それは(16)式に示されたとおりである。したがって，企業の行動は各期の利潤最大化を考慮すれば十分であるということがわかる。実際，各期の利潤がゼロであるならば，期間を通じた利潤の割引現在価値の和もゼロになるからである。

一般物価水準を1に規格化してあることを想起すると，(15)式ならびに(17)，(18)を考慮して資産の受給条件は次で与えられる。

$$f'(k(t)) = r(t) + \delta \tag{75}$$

同様に，労働の受給条件は以下で与えられる。

$$f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) = w(t) \tag{76}$$

注意したいのは，このモデルにおける労働ならびに資産の家計による供給はそれぞれの価格 $r(t)$，$w(t)$ に関しては非弾力的になされているということである。したがって，上の(75)式と(76)式で決定されるのは，それぞれの需要量ではなく，供給された数量を買い切る価格の水準，つまり $r(t)$ と $w(t)$ の各期における実質価格であるということである。

4.4 各期の市場均衡

本小節では，各期ごとの市場均衡の在り方ならびに条件を見ることにする。

4.4.1 資産市場の均衡

このモデルにおける資産とは，各家計が保有する資産$A(t)$を企業に提供し，その対価としての資本レンタル料$r(t)$を家計が受け取るという過程を表したものである。各期に提供される資産$A(t)$は，資本レンタル料$r(t)$に関しては，非弾力的に供給される。企業側はそれを全量需要し，生産活動を行う。したがって，この市場における各期の受給均衡の条件は次で表される。

$$A(t)=K(t) \quad \forall t\in[0,T] \tag{77}$$

ここから，次が従う。

$$a(t)=k(t) \quad \forall t\in[0,T] \tag{78}$$

さらに，次が成立することに注意せよ。

$$\dot{a}(t)=\dot{k}(\mathrm{t}) \quad \forall t\in[0,T] \tag{79}$$

一方で，資産の原資は貯蓄—所得のうちで消費しなかったもの—であることを考えると次を得る。

$$\dot{a}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{80}$$

4.4.2 労働市場の均衡

労働市場においては，一定率（$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=n$）で増加する労働が全員雇用される。

労働市場の均衡を考えるために，まず次を確認しよう。

$$\dot{k}(t)=\frac{d(K(t)/L(t))}{dt}=\frac{\dot{K}(t)L(t)-K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2}$$
$$=\frac{\dot{K}(t)}{L(t)}-\frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=\frac{\dot{K}(t)}{L(t)}-nk(t) \tag{81}$$

ここで，一人あたりの資本蓄積が労働人口の増加の分だけ減殺されていることに注意しなければならない。

それは，人口が増加するに連れて，spreadしてカウントしなければならないことに起因している。

4.4.3 動学的均衡

ここまでに得られた均衡条件を列記すると次のようになる。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}(r(t)-(\rho-n) \qquad \text{(74；再掲)}$$

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t) \tag{82}$$

ここで(82)の導出には(79)式および(80)式を用いた。また，資産の受給条件を表す(75)式を考慮すると，(74；再掲）は，次のように，再び書き換えることができる。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}(f'k(t))-\delta-\rho) \tag{83}$$

この(83)式と(82)式が，均衡を形成する微分方程式である。

5 結びにかえて

社会的な最適性を求めたsocial planner が解いた問題の解である(62)式および(53)式の組み合わせは，個々の主体が自らの利益のみを求めた結果として市場均衡として解かれた(83)式および(82)式と完全に一致している。

これは集権的（centralized）な経済の資源配分と分権的（decentralized）な経済の資源配分が一致していることを示している。

これは別に驚くにはあたらない。完全競争を仮定し，かつモデルのspecifcationによって，解の一意性が保証されるもとでは，両者が一致するのはある意味でtrivialな結果である。言い方を変えれば「厚生経済学の第１基本定理」を確認したに過ぎない。

本稿の目的のひとつは，まさにこの点を確認するためにあったといえる。

しかしながら，「最適成長」のみを論じて「均衡成長」を論じることに替えるような態度に対しては，その両者の違いを明確にすることを意

味なしとはしない。数学的な論述の影にそのような問題が見えない形で隠れているという事情もあろう。両者は明確に区別されるべきである。

本稿で触れられなかった論点のうち，幾つかを指摘したい。何よりも経済成長の本来のエンジンとなるべきは技術進歩であろう。本稿のモデルでは，それが触れられていない。特に技術進歩が正の外部生をもたらすような性格のものであるとき，本稿で区別したふたつのアプローチは異なった結果を導くことが予想される。社会的厚生から見て本来十分になされるべき技術進歩への投資が，個々の企業のインセンティヴにのっとった形では実現しない。結果として，広く社会的に享受されるべき技術進歩の果実が，人々の手にわたらない可能性がある。

もうひとつ指摘しておかなければならない点として，現実の経済成長を考えるとき，実証データとの連携は不可欠である。そのためには，モデルとして，本稿のような連続時間を前提としたものよりは，離散時間を扱ったもののほうが現実的である。

残された論点は他日を期すことにする。

参考文献

［1］Barro, Robert J and Sala-i-Martin, Xavier. *Economic Growth Second Edition*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts, USA and London, England, 2004.

［2］Blanchard, Oliver J. and Stanley Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts, USA, 1989.

［3］Cass, D. "Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32, 233-240, 1965.

［4］Koopmans, T. "On the Concept of Optimal Economic Growth," in *Pontifciae Academic Scientiarum Scripta Baria*, No. 28, Amsterdam, North-Holland, 1965.

［5］大住圭介,『経済成長分析の方法―イノベーションと人的資本のマクロ動学分析―』, 九州大学出版会，福岡，2003.

［6］大住圭介・川端公久・筒井修二編,『経済成長と動学』，勁草書房，東京，2006.

［7］西村和雄・矢野誠,『マクロ経済動学』，岩波書店，東京，2007.