《研究ノート》

離散ウェーブレット変換と関数空間

鈴　木　俊　夫

1　はじめに

1．1　周波数解析

　ある信号に対して，その波形を分解し，周波数領域での特性を調べる解析手法を周波数解析という．周波数解析は数学の分野ではFourier解析が対応する．Fourier解析は関数（信号）をsinとcosの単振動に分解し，その関数の特徴を調べるという発想から発展した分野で，電気工学，音響学，工学，信号処理等，様々な分野において必要不可欠なものとして扱われている．Fourier解析はもともと，熱伝導に関する現象を数学的に記述するために，フランスの物理学者J. Fourierによって考案されたものである．

　2π 周期の関数 f に対して

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\} \qquad (1)$$

のような級数展開を考える．ここで，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ \ (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

である．これはFourier級数展開と呼ばれる．一方で，Eulerの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（i は虚数単位）を用いると，Fourier級数展開（1）は

$$f(x) \approx \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx} \qquad (2)$$

と書き換えることができる．ここで，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ \ (n \in \mathbf{Z})$$

である．この式(２)を特に，複素 Fourier 級数展開と呼ぶ．Fourier 級数展開を，（周期関数ではない）一般の関数に適応したのが，Fourier 変換である．

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx \ \ (\xi \in \mathbf{R})$$

を f の Fourier 変換といい，こちらも数学だけでなく，様々な分野においてに非常に重要な役割を持つ．

一方で，応用における Fourier 変換はアルゴリズム化され，高速 Fourier 変換（Fast Fourier Transform, FFT）として用いられている．これは離散ウェーブレット変換における演算量を，バタフライ演算により減少させ，機械における計算時間を減少させている．

Fourier 変換は三角関数という無限長の関数を用いた解析であり，有限長の台しか持たない信号については相性がよくない．そこで，１つの小さな波の拡大縮小，及び平行移動の重ね合わせで，信号を解析するというのがウェーブレットの発想である．

ウェーブレット（wavelet）は小さな（let）波（wave）という意味であり，20世紀初頭から発展した分野である．最初のウェーブレットは，1909年にハンガリーの数学者 Alfréd Haar によって構成された Haar ウェーブレットであり，当時はウェーブレットという言葉が存在しなかった．その後，20世紀後半になると，連続ウェーブレット変換，離散ウェーブレット変換，多重解像度解析などの概念が生まれ，ウェーブレット解析は大きな発展を遂げた．本稿では，離散ウェーブレットについての初等的な解説を行いたい．

１．２　準備

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R})\ ;\ |f|_N = \sum_{0 \le \alpha+\beta \le N} \sup(1+|x|)^\alpha |\partial_x^\beta f(x)| < \infty \text{ for all } N \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

とおく．$\mathcal{S}$ の元を急減少関数という．$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ は $|\cdot|_N$ をセミノルムとして Fréchet 空間になる．dx を $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．$1 \le p \le \infty$ に対して，

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \operatorname*{ess.sup}_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases}$$

と定め，$L^p(\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}\ ;\ \|f\|_{L^p} < \infty\}$ と定める．特に $p=2$ のときは $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して内積

$$(f,g)_{L^2} = \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

が定まり，$L^2(\mathbf{R})$ は Hilbert 空間になる．$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})$ に対して，

$$\mathcal{F}f(\xi)(=\hat{f}(\xi)) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

を f の Fourier 変換といい，

$$\mathcal{F}^{-1}f(x)(=\check{f}(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

を f の逆 Fourier 変換という．また，

$$\mathrm{supp}\ f = \overline{\{x \in \mathbf{R}\ ;\ f(x) \neq 0\}}$$

を関数 f のサポートといい，supp f がコンパクトであるとき，f はコンパクトサポートを持つという．また，集合 A に対して，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

とおき，これを集合 A における特性関数という．

2　ウェーブレット

2．1　多重解像度解析

ウェーブレット関数は，その拡大縮小と平行移動で，$L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底を構成する．まずは，ウェーブレットを構成するにあたって重要な，多重解像度解析を確認する．

Definition 2.1　以下の条件を満たす閉部分空間 $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$ の列 $\{V_j\}$ と関数 $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ の組（$\{V_j\},\varphi$）を多重解像度解析（*Multiresolution analysis, MRA*）という：

（ｉ）　$V_j \subset V_{j+1}$ *for all* $j \in \mathbf{Z}$

（ii）　$\overline{\cup_{j\in Z} V_j} = L^2(\mathbf{R})$

（iii）　$\cap_{j\in Z} V_j = \{0\}$

（iv）　$f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ *for all* $j \in \boldsymbol{Z}$

（ｖ）ある $\varphi \in V_0$ が存在して，$\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbf{Z}\}$ が V_0 の正規直交基底をなす．

条件(v)の関数 $\varphi \in V_0$ をスケーリング関数と呼ぶ．また，$j \in \mathbf{Z}$ を解像度と呼ぶ．

MRA の利点は，それが存在すれば，ウェーブレット $\psi \in L^2(\mathbf{R})$，すなわち $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底が構成できるという点である．Hilbert 空間の直交分解定理より，$V_1 = V_0 \oplus W_0$，$V_0 \perp W_0$ なる W_0 が存在する．W_0 の構成法から，$\{\psi(\cdot - k)\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}$ が W_0 の正規直交基底になるような関数 $\psi \in W_0$ が存在する．この ψ をウェーブレットと呼ぶ．同様にして，$V_2 = V_1 \oplus W_1$，$V_1 \perp W_1$ なる W_1 が存在する．この操作を繰り返すと，

$$V_j = \bigoplus_{\ell<j} W_\ell$$

と，V_j の直交分解が得られる．すると，$L^2(\mathbf{R})$の直交分解

$$L^2(\mathbf{R}) = \left(\bigoplus_{\ell \geq j} W_\ell\right) \bigoplus V_j \tag{3}$$

または，

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} W_\ell \tag{4}$$

が得られる．MRA の条件と ψ の構成法から

$$\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)\ ;\ j,k \in \mathbf{Z}\}$$

は $L^2(\mathbf{R})$の正規直交基底になる．これは，（４）の分解に対応する基底である．即ち，ウェーブレットを構成することで，$L^2(\mathbf{R})$の正規直交基底が得られることになる．一方で，（３）に対応する基底は

$$\{2^{\ell/2}\varphi(2^\ell \cdot -k)\ ;\ k \in \mathbf{Z}\} \bigcup \{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)\ ;\ j \geq \ell, k \in \mathbf{Z}\}$$

となる．これはレベル j の分解と呼ばれる．

２．２　多重解像度解析からウェーブレットへ

（$\{V_j\}, \varphi$)を MRA とする．Def. 2.1 の条件 $V_0 \subset V_1$から，ある列 $\{\alpha_k\} \subset \mathrm{C}$ が存在して，

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k \varphi(2x - k)$$

と書ける．これをツースケール関係という．両辺に Fourier 変換を施すと，

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k e^{ik\xi/2}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

が得られる．このとき，2π 周期の関数

$$m(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$$

をローパスフィルタと呼ぶ．これを用いるとツースケール関係は

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\xi) &= m\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= m\left(\frac{\xi}{2}\right) m\left(\frac{\xi}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right) \\
&= m\left(\frac{\xi}{2}\right) m\left(\frac{\xi}{4}\right) m\left(\frac{\xi}{8}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{8}\right) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

と変形することができ，ここから次を得る．

Proposition 2.2　$\varphi \in L^2(\mathbf{R})$はツースケール関係を満たし，$\hat{\varphi}(\xi)$は$\xi=0$で連続とする．このとき，

$$\hat{\varphi}(\xi)=\hat{\varphi}(0)\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

ローパスフィルタはスケーリング関数や MRA を定めるための重要な役割をはたす．まずは，ローパスフィルタからスケーリング関数が構成される条件を確認しよう．

Proposition 2.3　$m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k e^{ik\xi}$ は以下の条件を満たすとする：

（a）　m_0は連続，2π周期関数，

（b）　$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$ *for all* $\xi\in\mathbf{R}$,

（c）　$m_0(0)=1$.

このとき，$\hat{\varphi}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(\frac{\xi}{2^j})$と定めると，$\varphi\in L^2(\mathbf{R})$かつ，$\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}\leq 1$.

Proposition 2.4　$m_0(\xi)=\sum_{k=-\ell}^{k=\ell}\alpha_k e^{ik\xi}$ は Proposition 2.3 の（a）－（c）を満たすとする．さらに，

$$m_0(\xi)\neq 0 \quad \mathit{for} \quad \xi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

このとき，$\hat{\varphi}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(\frac{\xi}{2^j})$とおくと，$\{\varphi(\cdot-k)\mid k\in\mathbf{Z}\}$ は正規直交となる．

Proposition 2.4で定まる φ に対して，

$$V_0=\overline{\mathrm{span}\,\{\varphi(\cdot-k)\mid k\in\mathbf{Z}\}}$$

とおき，

$$V_j=\{f(2^j\cdot)\mid f\in V_0\}$$

と定める．ここで，span K は，集合 K の元によって張られる線形空間とする．このとき，$(\{V_j\},\varphi)$ は MRA となる．この $\{V_j\}$ から，ウェーブレットが以下の定理で構成される．

Theorem 2.5　$(\{V_j\},\varphi)$を *MRA* とする．このとき，$c_k=\left(\varphi,\sqrt{2}\varphi(2\cdot-k)\right)_{L^2}$に対して，

$$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{c_{1-k}}(-1)^k\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

s.t.

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{-i(\xi/2+\pi)}\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

を考える．このとき，ψ はこの *MRA* に付随するウェーブレットとなる．

3　ウェーブレットの例

3．1　Haar ウェーブレット

$V_j=\{f\in L^2(\mathbf{R})$；$f$は$[2^{-j}n,\ 2^{-j}(n+1)]$ $(n\in\mathbf{Z})$上で定数$\}$ $(j\in\mathbf{Z})$とおき，

$$\varphi(x)=\chi_{[0,1)}(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<1),\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

と定める．この MRA から定まるウェーブレットは

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<\frac{1}{2}),\\ -1 & (\frac{1}{2}\le x<1),\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

となる．この ψ を Haar ウェーブレットという．このウェーブレットは Alfréd Haar によって1909年に構成された，最初のウェーブレットである．Haar ウェーブレットはコンパクトサポートを持つ，不連続な関数である．三角関数とは対照的なこの特徴により，Fourier 解析では扱いにくい信号に対して，Haar ウェーブレットにおける解析が有効なことがある．

3．2　Shannon ウェーブレット

supp $\mathcal{F}f$がコンパクトサポートを持つような関数$f\in L^2(\mathbf{R})$を，帯域制限関数という．帯域制限を持つウェーブレットの代表として，Shannon ウェーブレットがある．$V_j=\{f\in L^2(\mathbf{R})$；$\mathcal{F}f(\xi)=0$ for $|\xi|>2^j\pi\}$ $(j\in\mathrm{Z})$とおき，$\mathcal{F}\varphi(\xi)=x_{[-\pi,\pi]}(\xi)$とおく．$\varphi\in V_0$は明らかである．この関数に逆 Fourier 変換を施すと，

$$\varphi(x)=\mathrm{sinc}\ x=\begin{cases}\frac{\sin\pi x}{\pi x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

となる．この MRA に対して，Shannon ウェーブレットは次で与えられる．

$$\psi(x)=\frac{\sin\pi(x-1/2)-\sin 2\pi(x-1/2)}{\pi(x-1/2)}$$

これは$\psi\notin L^1(\mathbf{R})$であり，減衰度は悪いが，$\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$であるため，滑らかな関数の近似に適したウェーブレットである．また，$f\in V_0$におけるスケーリング関数を用いた展開は，

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k)\mathrm{sinc}(x-k)$$

となり，これは Shannon のサンプリング定理に相当する展開である．

4　ウェーブレット展開と関数空間

4．1　L^p 空間，Sobolev 空間とウェーブレット

$\psi \in L^2(\mathbf{R})$をウェーブレットとし，$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$とする．$f \in L^2(\mathbf{R})$が，

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

の形で表されているとき，これを関数fのウェーブレット展開という．ウェーブレット展開の係数と，その関数が満たす性質は，密接な関係がある．例えば，関数fのウェーブレット展開の係数を用いて，$f \in L^p(\mathbf{R})$を特徴づけることができる．いま，ウェーブレットψが，$\psi \in C^1(\mathbf{R})$，$|\psi(x)|$，$|\psi'(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$ を満たしているとする．このとき，$f \in L^p(\mathbf{R})$ $(1<p<\infty)$となるための必要十分条件は，

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f,\psi_{j,k})_{L^2}|^2 |\psi_{j,k}(x)|^2 \in L^p(\mathbf{R})$$

または

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f,\psi_{j,k})_{L^2}|^2 2^{-j}\chi_{[2^j k, 2^j(k+1)]}(x) \in L^p(\mathbf{R})$$

となることである．同様にして，Sobolev 空間

$$H^s(\mathbf{R}) = \{f \in L^2(\mathbf{R})\ ;\ \int_{\mathbf{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

について，$f \in H^s(\mathbf{R})$となるための必要十分条件は，

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f,\psi_{j,k})_{L^2}|^2 (1+2^{-2js}) < \infty$$

となることである．

4．2　Besov 空間とウェーブレット

Besov 空間は，L^p 空間，Sobolev 空間，Hardy 空間を始めとした，調和解析や偏微分方程式で現れる多くの関数空間を含んでおり，様々な分野で注目されている．本稿の締めくくりとして，Besov 空間とウェーブレットの関係について見ていきたい．まずは，少々複雑であるが，Besov 空間の定義を見てみよう．関数Φ，$\Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$を次を満たすように定める．

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le 4), \\ 0 & (|x| \ge 8), \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} 1 & (2 \le |x| \le 4), \\ 0 & (|x| \le 1 \text{ or } |x| \ge 8). \end{cases}$$

さらに，関数$\tau \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$に対して，

$$\tau(D)f = \mathcal{F}^{-1}(\tau\mathcal{F}f).$$

と定める．また，数列$\{a_n\}$に対して，ℓ^pノルム（$1 \le p \le \infty$）を

$$\|\{a_n\}\| = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \sup_n |a_n| & (p = \infty) \end{cases}$$

と定める．

Definition 4.1　$1 \le p, q \le \infty$，$s \in \mathbf{R}$ に対して，*Besov* ノルムを次で定める．

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|\Phi(D)f\|_{L^p(\mathbf{R})} + \left\| \left\{ 2^{js}\Psi_j(D)f \right\}_{j\ge 0} \right\|_{\ell^q}$$

ただし，$\Psi_j(x) = \Psi(2^{-j}x)$ とする．さらに，*Besov* 空間を次で定める．

$$B^s_{p,q} = \{f; \|f\|_{B^s_{p.q}} < \infty\}.$$

この定義は Φ と Ψ のとり方によらない．さて，この関数空間に関しても，ウェーブレットとの関わりがある．実際，Besov ノルム $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$ について，次が成り立つ．

Theorem 4.2　$1 \le p, q \le \infty$ とし，$s \in \mathbf{R}$ とする．また，$f, \varphi \in B^s_{p,q}$ とする．このとき，

$$\left\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi(\cdot - k))_{L^2} \varphi(x-k) \right\|_{L^p(\mathbf{R})} + \left\| \left\{ 2^{js} \| \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{j,k})_{L^2} \psi_{j,k}(x) \|_{L^p(\mathbf{R})} \right\}_{j\ge 0} \right\|_{\ell^q}$$

は $\|f\|_{B^s_{p,q}}$ と同値なノルムになる．

References

[1] 新井仁之，新・フーリエ解析と関数解析学，培風館，2000.

[2] A. Cohen, Numerical Analysis of Wavelet Methods, JAI Press, 2003

[3] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[4] Y. Meyer, Wavelets and operators. Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] P. Wojtaszczyk, Wavelets as unconditional bases in $L^p(\mathbf{R})$, J. Fourier Anal. Appl., 5, No. 1, 73-85 (1999).

[6] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge University Press, 1959.