《論　文》

p 進数体上の複素数値関数に対する Stockwell 変換の構成

鈴　木　俊　夫

Abstract

本稿では p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ 上の複素数値関数に関する Stockwell 変換を構成し，ウェーブレット変換との関係やその性質をみる．特に，関数がその p 進ノルムの値にのみ依存するような場合，その Stockwell 変換も p 進ノルムにのみしか依存せず，変換が無限和で表現できることがわかった.

キーワード Stockwell 変換，p 進数，p 進解析.

1．Introduction

有理数体 $\mathbf{Q}$ を絶対値 $|\cdot|$ から定まる Euclid 距離で完備化することにより，実数体 $\mathbf{R}$ が構成される．一方で，$\mathbf{Q}$ を p 進ノルム $|\cdot|_p$ で完備化することにより，p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ が得られる．この p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ は KurtHensel によって1897年に導入されたものである. 0 でない p 進数 $x \in \mathbf{Q}_p$ で，$|x|_p = p^{\gamma}$ を満たすものは，次のように p 進展開できる；

$$x = p^{-\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)\,.$$

ここで，$0 \leq x_k \leq p-1$，$x_0 \neq 0$である.

Fourier 解析は，時間周波数解析の中で最も有名な解析手法である．この手法は，信号処理をはじめとして，様々な分野で応用されている．Fourier 変換は無限大の台の長さを持つ sin や cos を用いた変換であるため，対象とする関数（信号）時間局所的な情報を見ることが難しい．そこで，窓関数をかけて局所的な情報を見るとい

う，窓 Fourier 変換が考案された．一方，小さな波の平行移動と拡大縮小の重ね合わせで，関数を解析するというウェーブレット解析が近年で大きな発展を遂げている．この窓 Fourier 変換とウェーブレット変換を組み合わせた変換が，近年注目されている Stockwell 変換である（[2]，[5]，[7] を見よ）．

$x \in \mathbf{Q}_p$，$|x|_p = x^{\gamma}$ に対して，x の小数部分を次のように定める．

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0 & if \ \gamma \geq 0 \ \text{ or } \ x = 0, \\ p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{|\gamma|-1} p^{|\gamma|-1}) & if \ \gamma < 0. \end{cases}$$

これを用いて, $\mathbf{Q}_p$ の加法群としての指標を $\chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}_p)$ とおき, $f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して,

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\chi_p(\xi x)dx$$

を f の p 進 Fourier 変換という．

時間局所的な情報を解析したいときに，窓 Fourier 変換（短時間 Fourier 変換，Gabor 変換とも）やウェーブレット変換が用いられる．窓 Fourier 変換は解析したい関数に窓関数 $g \in L^1(\mathbf{Q}_p) \cap L^2(\mathbf{Q}_p)$ を動かすことで，局所的な時間における周波数解析を行えるのが特徴である．$f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，p 進窓 Fourier 変換を

$$(G_{\varphi}f)(b,\xi) = \frac{1}{\|g\|_2}\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\overline{g(x-b)}\chi_p(\xi x)dx, \quad b,\xi \in \mathbf{Q}_p$$

と定める（[4]を見よ）．またウェーブレット変換は，ウェーブレットと呼ばれる有限時間長，もしくは時間減衰する関数の拡大縮小で信号を解析する手法である（[1]を見よ）．$\psi \in L^1(\mathbf{Q}_p) \cap L^2(\mathbf{Q}_p)$ が

$$c_{\psi} = \int_{\mathbf{Q}_p} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|_p} da < \infty,$$

を満たすとき, ψ を（p 進）ウェーブレットという．$\alpha \in \mathbf{R}$ とする．$f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，p 進（連続）ウェーブレット変換を

$$(\Omega_{\psi}f)(a,b) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{c_{\psi}}|a|_p^{\alpha}}\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}dx$$

と定める（[3]を見よ）．ここで，$\overline{\psi(x)}$ は $\psi(x)$ の複素共役を表す．

Stockwell 変換（S 変換）は窓 Fourier 変換とウェーブレット変換のハイブリット変換と言われている．1996年に R.G. Stockwell，L. Mansinha，R.P. Lowe によって[5]で提案されたもので，現在その応用が注目されている変換である．本稿では，p 進数体上の複素数値関数に対する Stockwell 変換を定め，逆変換やその性質を見る．以下，

$$\begin{array}{rcl} S_\gamma &=& \{x \in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p = p^\gamma \}, \\ B_\gamma &=& \{x \in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p \leq p^\gamma \} \end{array}$$

とする.

2. Known Results

加法群としての $\mathbf{Q}_p$ 上の指標 χ_p について，次が成り立つ.

Lemma 2.1

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\xi, \gamma; k_0) &=& \displaystyle\int_{S_\gamma, x_0 = k_0} \chi_p\left(|\xi|_p^{-1} x\right) dx \\ &=& \left\{ \begin{array}{ll} \chi_p\left(|\xi|_p^{-1} p^{-\gamma} k\right) p^{\gamma-1}, & \mathit{if}\ |\xi|_p \leq p^{-\gamma+1} \\ 0, & \mathit{if}\ |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}, \end{array} \right. \end{array}$$

が成立する．さらに一般に，

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\xi, \gamma; k_0, \cdots, k_l) &=& \displaystyle\int_{S_\gamma, x_0 = k_0, \cdots, x_l = k_l} \chi_p\left(|\xi|_p^{-1} x\right) dx \\ &=& \left\{ \begin{array}{ll} \chi_p\left(|\xi|_p^{-1} p^{-\gamma}\left(k_0 + \cdots + k_l p^l\right)\right) p^{\gamma-l-1}, & \mathit{if}\ |\xi|_p \leq p^{\gamma-l-1} \\ 0, & \mathit{if}\ |\xi|_p \geq p^{\gamma-l} \end{array} \right. \end{array}$$

が成り立つ.

この Lemma の証明は，[4]を参照されたい．また，単純な変数変換を用いることで，次の命題を得る.

Proposition 2.2 $f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ は p 進ノルム $|x|_p$ にのみ依存する関数とする．このとき，関数 $\psi \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，次が成立する：

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(|x|_p)\, \psi(\xi x) dx = \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}} f(p^\gamma) \int_{S_\gamma} \psi\left(|\xi|_p^{-1} x\right) dx.$$

この命題の証明は[6]を参照されたい.

ここで，上記の式において，$\psi = \chi_p$ として積分を計算すると，

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(x\xi) dx = \lambda(\xi, \gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} p^\gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right), & \mathit{if}\ \ |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \\ -p^{\gamma-1}, & \mathit{if}\ \ |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \\ 0, & \mathit{if}\ \ |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}. \end{array} \right.$$

となる．上の命題とあわせると，p 進ノルムにのみ依存する関数の Fourier 変換は，p 進ノルムにのみ依存する関数になることがわかる.

3．Main theorems

Definition 3.1　$g\in\mathcal{D}(\mathbf{Q}_p)$を窓関数とする．$f\in L^2(\mathbf{Q}_p)$に対して，$p$ 進 *Stockwell* 変換 S_g を次のように定める：

$$S_g[f](b,\xi)=|\xi|_p\int_{\mathbf{Q}_p}f(x)\overline{g\left(\xi(x-b)\right)}\chi_p(x\xi)dx. \tag{1}$$

前章でも述べたが，$\mathbf{R}$ 上の複素数値関数に対する Stockwell 変換はウェーブレット変換と密接な関係があることが知られている．$\mathbf{Q}_p$ 上の関数に対しても，p 進 Stockwell 変換は p 進ウェーブレット変換を用いて書くことができる．

Proposition 3.2　$\psi\in L^2(\mathbf{Q}_p)$をウェーブレットとし，$\psi(x)=\varphi(x)\chi_p(-x)$とおく．このとき，$p$ 進ウェーブレット変換Ω_ψと p 進 Stockwell 変換 S_φ について，次が成立する：

$$(S_\varphi f)(b,\xi)=\sqrt{c_\psi}|\xi|_p^{-\alpha+1}\chi_p(b\xi)(\Omega_\psi f)(b,1/\xi).$$

Proof

$$\begin{aligned}(\Omega_\psi f)(b,1/\xi) &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}|\xi|_p^{-\alpha}}\int_{\mathbf{Q}_p}f(x)\overline{\psi(\xi(x-b))}dx\\ &= \frac{|\xi|_p^{\alpha}}{\sqrt{c_\psi}}\int_{\mathbf{Q}_p}f(x)\overline{\varphi(\xi(x-b))}\chi_p(\xi(x-b))dx\\ &= \frac{|\xi|_p^{\alpha-1}}{\sqrt{c_\psi}}\chi_p(-b\xi)(S_\varphi f)(b,\xi)dx.\end{aligned}$$

　また Stockwell 変換が，窓 Fourier 変換と同様の形をしていることから，次がわかる．

Theorem 3.3　作用素 $\mathcal{A}$ を

$$(\mathcal{A}F)(\xi)=\int_{\mathbf{Q}_p}F(q,\xi)dq$$

で定める．このとき，任意の $f\in L^2(\mathbf{Q}_p)$に対して，

$$f=-\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}S_\varphi f$$

が成り立つ．

　p 進 Stockwell 変換の等長性を示すために，次の補題を準備する：

Lemma 3.4　任意の $\eta\in\mathbf{Q}_p$ と $g\in L^2(\mathbf{Q}_p)$に対して，次が成り立つ：

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\left|\widehat{g}\left(\frac{\eta-\xi}{\xi}\right)\right|^2\frac{d\xi}{|\xi|_p}=\int_{\mathbf{Q}_p}\frac{|\widehat{g}(\sigma-1)|^2}{|\sigma|_p}d\sigma.$$

Proof　p 進解析における変数変換の公式

$$\int_K f(x)dx = \int_{K_1} |\sigma'(y)|_p f(\sigma(y))dy$$

（[6]を見よ）を用いると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Q}_p} \left|\widehat{g}\left(\frac{\eta-\xi}{\xi}\right)\right|^2 \frac{d\xi}{|\xi|_p} &= \int_{\mathbf{Q}_p} |\widehat{g}\,(\sigma-1)|^2 \left|\frac{\sigma}{\eta}\right|_p \left|\frac{\eta}{\sigma^2}\right|_p d\sigma \\ &= \int_{\mathbf{Q}_p} \frac{|\widehat{g}(\sigma-1)|^2}{|\sigma|_p} d\sigma.\end{aligned}$$

つまり上の補題の左辺の式は，実は $\eta \in \mathbf{Q}_p \setminus \{0\}$ によらずに定まることがわかる．この右辺の式が，実はウェーブレットの許容条件と対応している．実際，次の p 進 Stockwell 変換版の許容条件が，上記の式になるのである．

Theorem 3.5　　窓関数 $g \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ は $\|g\|_{L^2(\mathbf{Q}_p)} = 1$を満たし，許容条件

$$c_g = \int_{\mathbf{Q}_p} \frac{|\widehat{g}(\xi-1)|^2}{|\xi|_p} d\xi < \infty$$

が成り立つとする．このとき，任意の $f, h \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，次が成立する：

$$(f,h)_{L^2(\mathbf{Q}_p)} = \frac{1}{c_g} \int_{\mathbf{Q}_p} \int_{\mathbf{Q}_p} S_g f(b,\xi) \overline{S_g h(b,\xi)} \frac{dbd\xi}{|\xi|_p}.$$

Proof　　$f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ の像 $S_g f(b, \xi)$ に，パラメータ b に対する *Fourier* 変換を用いることで，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{b\to\eta}[S_g f(b,\xi)](\eta,\xi) &= \int_{\mathbf{Q}_p} \left(|\xi|_p \int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\overline{g(\xi(x-b))}\chi_p(x\xi)dx\right)\chi_p(b\eta)db \\ &= \int_{\mathbf{Q}_p} |\xi|_p f(x)\chi_p(x\xi)\left(\int_{\mathbf{Q}_p} \overline{g(\xi(x-b))}\chi_p(b\eta)db\right)dx \\ &= -\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\chi_p(x\xi)\chi_p(x\eta)\left(\int_{\mathbf{Q}_p} \overline{g(b)\chi_p(b\eta/\xi)}db\right)dx \\ &= -\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\chi_p(x(\xi+\eta))\overline{\widehat{g}(\eta/\xi)}dx \\ &= -\hat{f}(\xi+\eta)\overline{\widehat{g}(\eta/\xi)}\end{aligned}$$

を得る．このとき，任意の $f, h \in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，上の補題より，

$$
\begin{aligned}
(S_g f(b,\xi), S_g h(b,\xi))_{L^2(\mathbf{Q}_p^2, d\xi db/|\xi|_p)} &= (\mathcal{F}_{b\to\eta}[S_g f(b,\xi)], \mathcal{F}_{b\to\eta}[S_g h(b,\xi)])_{L^2(\mathbf{Q}_p^2)} \\
&= \int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} \hat{f}(\xi+\eta)\overline{\hat{g}(\eta/\xi)}\overline{\hat{h}(\xi+\eta)\overline{\hat{g}(\eta/\xi)}}\frac{d\xi d\eta}{|\xi|_p} \\
&= \int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} \hat{f}(\eta)\overline{\hat{h}(\eta)}\left|\hat{g}\left(\frac{\eta-\xi}{\xi}\right)\right|^2\frac{d\xi d\eta}{|\xi|_p} \\
&= c_g\int_{\mathbf{Q}_p}\hat{f}(\eta)\overline{\hat{h}(\eta)}d\eta \\
&= c_g(f,h)_{L^2(\mathbf{Q}_p)}.
\end{aligned}
$$

すなわち，上の式で $f=h$ と取ることで，この定理から作用素 $c_g S_\varphi\colon L^2(\mathbf{Q}_p)\to L^2(\mathbf{Q}_p^2,\ d\xi db/|\xi|_p)$ は等長であることがわかる．さらにこの定理より，任意の $f\in L^2(\mathbf{Q}_p)$ に対して，弱い意味での再生公式

$$
f(x)=\frac{1}{c_\varphi}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} S_g f(b,\xi)g(\xi(x-b))\chi_p(ibx)\frac{d\xi db}{|\xi|_p}
$$

が成り立つこともわかる．

Theorem 3.6　$f\in L^2(\mathbf{Q}_p)$ を任意の階段関数，すなわち，$x=|x|_p^{-1}(x_0+x_1p+x_2p^2+\cdots)$ に対して，

$$
f(x)=f(x_0|x|_p^{-1})
$$

と表せるものとする．また，$g\in L^2(\mathbf{Q}_p)$ はノルム $|x|_p$ にのみ依存する関数とする．このとき，$q,\xi\in\mathbf{Q}_p$，$|q|_p=p^{\gamma_q}$ に対して，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
(S_g f)(q,\xi) &= |\xi|_p\sum_{\gamma>\gamma_q}\sum_{k=1}^{p-1} f(kp^{-\gamma})\overline{g(|\xi|_p p^{\gamma})}\lambda(\xi,\gamma;k) \\
&\quad + |\xi|_p\overline{g(|\xi|p^{\gamma_q})}\sum_{\gamma<\gamma_q} f(kp^{-\gamma})\lambda(\xi,\gamma;k) \\
&\quad + |\xi|_p\sum_{k=0}^{\infty} f(kp^{-\gamma_q})\overline{g(|\xi|_p p^{\gamma_q-k})}\left(\lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\ldots,q_{k-1})\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\ldots,q_k)\right).
\end{aligned}
$$

Proof　$x,q,\xi\in\mathbf{Q}_p$ はそれぞれ，次の p 進展開が可能であるとする．

$$
\begin{aligned}
x &= p^{-\gamma}(x_0+x_1p+x_2p^2+\cdots), \\
q &= p^{-\gamma_q}(q_0+q_1p+q_2p^2+\cdots), \\
\xi &= p^{-\gamma_\xi}(\xi_0+\xi_1p+\xi_2p^2+\cdots).
\end{aligned}
$$

このとき，積分領域を分割し，*Stockwell* 変換を以下のように分けて考える．

$$\begin{aligned}(S_g f)(b,\xi) &= |\xi|_p \int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\overline{g(\xi(x-b))}\chi_p(x\xi)dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで,

$$\begin{aligned} I_1 &= |\xi|_p \int_{|x|_p>|q|_p} f(x)\overline{g(\xi(x-q))}\chi_p(x\xi)dx, \\ I_2 &= |\xi|_p \int_{|x|_p<|q|_p} f(x)\overline{g(\xi(x-q))}\chi_p(x\xi)dx, \\ I_3 &= |\xi|_p \int_{|x|_p=|q|_p} f(x)\overline{g(\xi(x-q))}\chi_p(x\xi)dx \end{aligned}$$

である．$\xi' = (\xi_0 + \xi_1 p + \cdots)^{-1}$とおく．$I_1$に対して，$x = \xi' x'$と変数変換すると，

$$\begin{aligned} I_1 &= |\xi|_p \int_{|x|_p>|q|_p} f(x)\overline{g(|\xi|_p|x|_p)}\chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p \sum_{\gamma>\gamma_q} \int_{S_\gamma} f(x)\overline{g(|\xi|_p|x|_p)}\chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p \sum_{\gamma>\gamma_q} f(p^\gamma)\overline{g(|\xi|_p p^\gamma)} \int_{S_\gamma} \chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p \sum_{\gamma>\gamma_q} f(p^\gamma)\overline{g(|\xi|_p p^\gamma)}\lambda(\xi,\gamma). \end{aligned}$$

上と同様にして，I_2とI_3も，

$$\begin{aligned} I_2 &= |\xi|_p\overline{g(|\xi|_p|q|_p)} \int_{|x|_p<|q|_p} f(x)\chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p\overline{g(|\xi|_p p^{\gamma_q})} \sum_{\gamma<\gamma_q} \int_{S_\gamma} f(p^\gamma)\chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p\overline{g(|\xi|_p q^{\gamma_q})} \sum_{\gamma<\gamma_q} f(p^\gamma)\lambda(\xi,\gamma), \\ I_3 &= |\xi|_p \int_{S_{\gamma_q}} f(x)\overline{g(|\xi|_p|x-q|_p)}\chi_p(x\xi)dx \\ &= |\xi|_p f(p^{\gamma_q}) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S_{\gamma_q}, x_0=q_0,\cdots,x_{k-1}=q_{k-1},x_k\neq q_k} \overline{g(|\xi|_p|x-q|_p)}\chi_p(\xi x)dx \\ &= |\xi|_p f(p^{\gamma_q}) \sum_{k=0}^{\infty} \overline{g(|\xi|_p|q|_p|p^k|_p)} \int_{S_{\gamma_q}, x_0=q_0,\cdots,x_{k-1}=q_{k-1},x_k\neq q_k} \chi_p(\xi x)dx \\ &= |\xi|_p f(p^{\gamma_q}) \sum_{k=0}^{\infty} \overline{g(|\xi|_p p^{\gamma_q-k})}(\lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\cdots,q_{k-1}) - \lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\cdots,q_k)). \end{aligned}$$

I_1，I_2，I_3を(2)式に代入することで，主張の式を得る．

上の定理と同様の証明の手法で，次の結果も得られる．

Corollary 3.7　$f \in L^2(\mathbf{Q}_p)$と$g \in L^2(\mathbf{Q}_p)$はノルム$|x|_p$にのみ依存する関数とする．このとき，$q, \xi \in \mathbf{Q}_p$と$|q|_p = p^{\gamma_q}$に対して，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
(S_g f)(b,\xi) \;&=\; |\xi|_p \sum_{\gamma>\gamma_q} f(p^{\gamma})\overline{g\left(|\xi|_p p^{\gamma}\right)}\lambda(\xi,\gamma) \\
&\quad + |\xi|_p \overline{g(|\xi|p^{\gamma_q})} \sum_{\gamma<\gamma_q} f(p^{\gamma})\lambda(\xi,\gamma) \\
&\quad + |\xi|_p f(p^{\gamma_q}) \sum_{k=0}^{\infty} \overline{g(|\xi|_p p^{\gamma_q-k})}\left(\lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\ldots,q_{k-1}) - \lambda(\xi,\gamma_q;q_0,\ldots,q_k)\right).
\end{aligned}
$$

References

[1] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Seriesin Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[2] M. Hutníková, On the range of Stockwell transforms. Appl. Math. Comput. 219 (2013), no. 17, 8904-8909.

[3] C. Minggen, G. Gao, and P. U. Chung, On the wavelet transform in the field $\mathbf{Q}_p$ of p-adic number, Appl. Comput. Harmon. Anal. 13, 2002, 162-168.

[4] S.Y. Park, P.U. Chung, An Application of p-adic Analysis to Windowed Fourier Transform, Kangweon-Kyungki Math. Jour. 12 (2004), No. 2, pp.193-200.

[5] R.G. Stockwell, L.Mansinha, and R.P. Lowe, Localization of the complex spectrum: the S-transform., IEEE Transactions on Signal Processing, 44: 998-1001 (1996).

[6] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, E.I. Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, 1994.

[7] Du J., Wong M.W., Zhu H., Continuous and discrete inversion formulas for the Stockwell transform, Integral Transforms Spec. Funct. 18 (2007), 537-543.