《論　文》

配送時間制限を考慮した施設・在庫配置問題

片　山　直　登

1．はじめに

近年，オンラインショップの進展とともに，翌日配送から当日配送，さらには数時間以内の配送など，極めて短納期の配送サービスが提供されるようになってきている．これらを実施するため，配送センター内作業の自動化やロボット化により出庫時間の短縮化を図り，これらに加えて，小規模の倉庫を兼ねた配送拠点を需要地近郊に多数配置し，適切な商品を在庫し，これらの配送拠点から直接配送することにより，短納期配送を実現することが行われている．このため，適切な配送拠点の配置と在庫の配置を決定することが，短納期配送を実現する上で重要な課題のひとつとなっている．

施設配置問題は，施設候補集合が与えられたときに，様々な費用が最小になるような施設の配置を求める問題である．アーク上の施設の配置問題はネットワーク設計問題として知られており，ノード上の施設の配置問題は施設配置問題として知られている．ネットワーク設計問題はCrainic et al.（2021）が，施設配置問題はLaporte et al.（2015）が関連する研究をまとめている．短納期配送を対象とした研究は近年始まったばかりである．Boland et al.（2017）は，当日配送・翌日配送を想定したサービスネットワーク設計モデルにおいて，連続時間を考慮したモデルを提案し，部分的な時間拡張ネットワークを用いた反復アルゴリズムを開発している．Scherr et al.（2018）は，当日配送システムにおける自律走行車のサービスネットワーク設計問題の定式化を示し，CPLEXを用いた計算実験を行っている．Wu et al.（2020）は，都市部の当日配送システムにおいて，配送拠点における同時積下し可能車両数が制限されるサービスネットワーク設計問題に対して，メタヒューリスティクスおよびハイブリッドマスヒューリスティクスなどの解法を提案している．配送時間の制限を取り扱ったネットワーク設計

モデルは少なく，Hellsten et al.（2021）は単一の配送時間制限を考慮したモデルに対して，いくつかの定式化を示し，列生成法と分枝価格法を用いた解法を示している．片山（2022）は，施設配置とアーク上の資源配置問題に対して，複数の配送時間基準に対する需要カバー率を考慮したモデルの定式化を示し，アークフローを用いた定式化について数値実験を行っている．

本研究では，いくつかの中央配送センターから多段階の配送拠点を経由して顧客へ商品を配送することを想定する．与えられた顧客の需要を配送する際に，指定した割合の需要を当日配送や翌日配送のような複数の短納期で配送する．中央配送センターにすべての商品を在庫し，受注により出庫する場合，情報システムの高度化，出庫業務の高速化・ロボット化のみでは対応が困難なことが考えられる．そこで，顧客により近い中間の配送拠点に在庫の一部を保持し，その拠点から商品を出庫することにより短納期の配送比率を高めることが可能になる．このような多品種の需要をもつ多段階の施設・在庫配置問題を対象とし，指定された配送時間制限比率を満足するような中間配送拠点の配置とその規模を決定するとともに，在庫配置と在庫施設の規模を決定するモデルを取り扱い，その定式化を示す．

2．配送時間制限比率を考慮した施設・在庫配置モデル

複数の中央配送センター，配送拠点である施設候補と顧客などから構成される多段階のステージを対象とする．ステージ１は商品を出庫する複数の中央配送センターなどの施設群，最終ステージは顧客または配送区域とし，その中間のステージは中継・在庫のための配送施設候補群で構成される．中央配送センター，施設候補や顧客などをノードで表現する．なお，最終ステージに含まれるノードは顧客または配送区域を表すが，ここでは顧客と表現する．ステージ１に含まれる中央配送センターから商品がピッキング・出庫され，各ステージに含まれる配置された施設を経由し，最終ステージを構成する顧客に配送される．なお，中間にあるステージに含まれる施設を経由しない場合は，中間ステージにダミー施設を設定する．また，同じ中央配送センターから同じ顧客に配送される商品をまとめて品種と表現し，それらの配送量を需要とよぶ．隣接するステージに含まれるノード間の配送は直送のみを考え，直送する配送路の候補をアークと表現する．これらは上流のステージに含まれるノードから隣接する下流のステージに含まれるノードへの向きをもつアークとなる．最終ステージの１つ前のステージに含まれるノードから最終ステージのノードへは一般に巡回配送が行われるが，ここでは近似的に直送として取り扱う．

最終ステージ以外のステージに含まれる中央配送センターや配送施設候補であるノードでは，需要に対して入庫・仕分け・出庫などの荷役作業の行われ，いくつかの品種の

全需要または一部の需要を在庫としてもつことができる．中間のステージに含まれる配送施設であるノード上に在庫を持つ場合には，このノードにある在庫から出庫できるため，納期を短縮することができる．これらの在庫は需要予測をもとにあらかじめステージ1に含まれるノードから配送される．

アーク上で配送される需要の流れをフローとよぶ．各ノードでは流入するフローに対して入庫・仕分け・出庫などの荷役作業がおこなわれ，入出庫量に比例した荷役費用が発生する．また，最終ステージを除くステージに含まれるノード上には入庫・仕分け・出庫のための荷役施設が配置でき，施設規模に従って荷役施設容量が決まり，荷役施設容量に応じて固定費用である荷役施設費用が発生する．これらのノード上には在庫することができ，保管，ピッキング，仕分けや出庫などのために在庫量に比例する在庫出庫費用が発生する．また，これらのノード上に在庫施設を配置する場合，在庫施設規模に従って在庫することができる在庫施設容量が決まり，在庫施設容量に応じて固定費用である在庫施設費用が発生する．これらの費用は顧客などに対応する最終ステージに含まれるノードでは発生しないため，最終ステージに含まれるノードに関してはこれらのノードに関する費用は考慮しない．ステージ間のアーク上では直送である配送が行われ，アーク上のフロー量に比例したフロー費用が発生する．

アークおよびノードでは，配送および入庫・仕分け・出庫のための時間が発生し，在庫をもつノードではピッキング，仕分けや出庫のための時間が発生する．アーク上で発生する時間を配送時間，ノード上で発生する入庫・仕分け・出庫の時間を荷役時間，ピッキング・出庫のための時間を在庫出庫時間とする．なお，一般に最終ステージの1つ前のステージに含まれるノードから最終ステージのノード間では巡回配送が行われるが，これらに対応する配送時間は巡回配送にかかる最大値とする．

当日配送，翌日配送などの複数の配送時間制限が与えられる．特定の配送時間制限を満たす需要の全需要に対する比率を需要カバー率とする．需要カバー率は，例えば，全需要の50％までを10時間以内に配送し，全需要の90％までを30時間以内で配送するといった制限である．ここで，ノード上に在庫を配置した場合は，需要は顧客に近い在庫しているノードから優先的に出庫するために，配送時間は在庫しているノードから顧客までの時間となる．

図1にステージ1のノードが1つである3ステージのネットワーク例，図2にe_{max}のステージ数をもつネットワーク例を示す．図1の左図では，1つの中央配送センターから，中間にある配送施設候補を経由して，顧客へ配送する．配送時間制限による需要カバー率を満たすように配送施設を配置し，中央配送センターの一部の在庫を中間の配送施設に移すことにより，需要カバー率を満たすことができる．

本研究では，配送時間制限に対する需要カバー率を満足するもとで，費用が最小となる配送施設であるノードの選択と荷役施設容量，在庫をもつノードの選択，在庫施設容

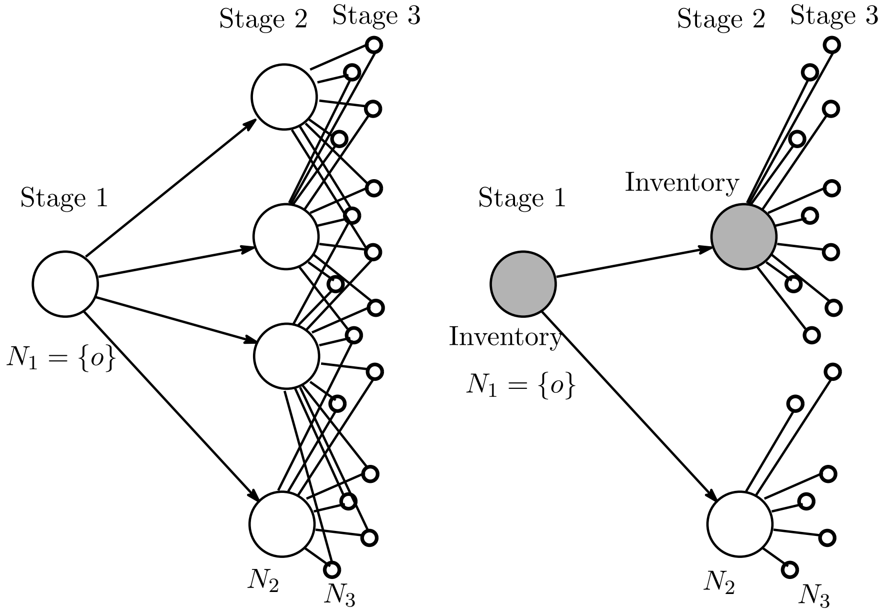

図 1　3Stage Network

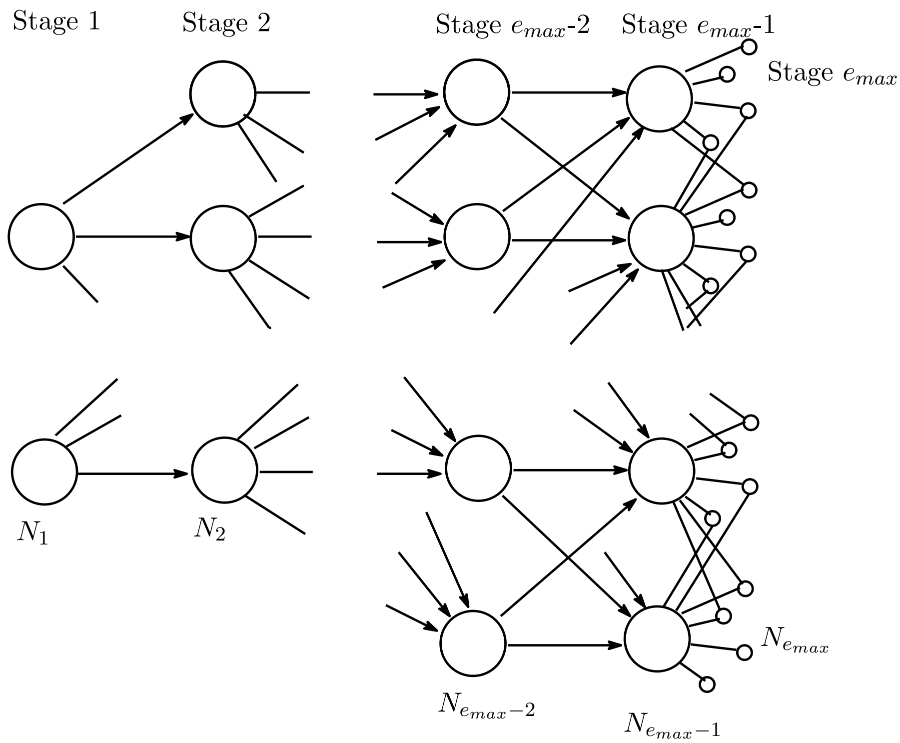

図 2　e_{max} Stage Network

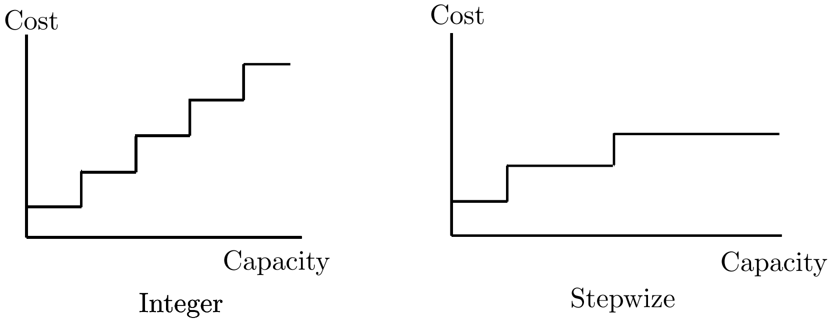

図３　Cost Function

量と在庫の配置，および使用するアークの選択と各需要のフローの経路を決定する．図１の右図は選択されたアークとノードからなる解の例であり，網かけがあるステージ１のノードとステージ２の１つのノードに在庫を配置することを示している．

3．３ステージ・１配送時間制限モデルの定式化

はじめに，３ステージ・１配送時間制限モデルの定式化を示す．なお，荷役施設費用および在庫施設費用は，図３の左図に示すように容量に比例し，かつ離散的に増加する．

ステージ数を３とし，ステージ１に含まれるノード集合を N_1とし, N_1に含まれるノードは１つで o のみとする．ステージ２に含まれるノード集合を N_2，ステージ３に含まれるノード集合を N_3とする．品種の集合を K，非負の整数集合を Z^+とする．

品種 k は始点 o，終点 d^k をもち，需要量 q^k が与えられている．品種 k の需要 q^k は始点 o からステージ２に含まれるノードを経由してステージ３の終点 d^k に配送され，その取りうる経路数は１本とする．アーク (i, j) には，アーク上の配送時間 t_{ij}，品種 k に対するアーク上の単位当たりのフロー費用 c_{ij}^k が与えられる．ノード n における品種 k に対する単位当たりの荷役費用を a_n^k，在庫出庫費用を b_n^k とする．ノード n に対する品種 k の全需要に対する荷役時間を t_n^k とし，荷役時間は荷役量に比例する．ノード n に配置される荷役施設の単位当たりの荷役施設費用を f_n，荷役施設容量を m_n とする．また，ノード n における品種 k の在庫に関して，全需要に対する在庫出庫時間 $\bar{t}_n^k$ が与えられ，在庫出庫時間は在庫量に比例する．また，ノード n に配置される在庫施設の単位当たりの在庫施設費用を g_n，在庫施設容量を $\overline{m}_n$ とする．在庫しているノードから顧客までの配送時間の制限を l，すべての品種の最大の配送時間を l_{max} とし，配送時間制限を満たす需要の全需要に対する需要カバー率を γ とする．

アーク (i, j) 上で品種 k の需要が配送され，アーク (i, j) 上をフローが流れるとき１，そうでないとき０であるフロー変数を x_{ij}^k とする．また，ノード n に対して，品種 k の

フローがノード n を経由し，ノード n 上で荷役が行われるとき１，そうでないとき０である品種荷役変数を u_n^k，ノード n に配置される荷役施設規模を表す非負の整数変数である荷役施設変数を y_n，ノード n に配置される在庫施設規模を表す非負の整数変数である在庫施設変数を i_n とする．品種 k の需要のうちノード n 上で在庫する比率である在庫比率変数を s_n^k とする．ステージ１およびステージ２に含まれるノードに配置される品種 k の在庫が配送時間制限を満たすとき１，そうでないとき０である配送時間制限変数をそれぞれ v_1^k および v_2^k とする．品種 k の需要のうちステージ１およびステージ２に含まれるノードに配置され，その在庫が配送時間制限を満たしている比率である配送時間制限比率変数をそれぞれ λ_1^k および λ_2^k とする．また，ノード o から在庫出庫され，ステージ２に含まれるノード n で荷役が行われる需要の比率である荷役需要比率変数を ρ_n^k とする．

このとき，アークフローを用いた３ステージ・１配送時間制限の整数施設変数モデル *3IAPL* は次のようになる．

3IAPL：

$$minimize \quad \sum_{k\in K}\sum_{i\in N_2} q^k \left(c_{oi}^k x_{oi}^k + \sum_{j\in N_3} c_{ij}^k x_{ij}^k \right) + \sum_{k\in K}\sum_{n\in N_2\cup\{o\}} q^k \left(a_n^k u_n^k + b_n^k s_n^k \right) + \sum_{n\in N_2\cup\{o\}} (f_n y_n + g_n i_n) \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{n\in N_2} x_{on}^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{2}$$

$$x_{on}^k - \sum_{j\in N_3} x_{nj}^k = 0 \quad \forall n \in N_2, k \in K, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N_2} x_{id^k}^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{4}$$

$$u_o^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{5}$$

$$x_{on}^k + \sum_{j\in N_3} x_{nj}^k = 2\, u_n^k \quad \forall n \in N_2, k \in K, \tag{6}$$

$$\sum_{k\in K} q^k u_n^k \le m_n y_n \quad \forall n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{7}$$

$$\sum_{n\in N_2\cup\{o\}} s_n^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{8}$$

$$\sum_{k \in K} q^k s_n^k \leq \bar{m}_n i_n \quad \forall n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{9}$$

$$s_n^k \leq u_n^k \quad \forall k \in K, n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{10}$$

$$\sum_{i \in N_2} \left(t_{oi} x_{oi}^k + \sum_{j \in N_3} t_{ij} x_{ij}^k \right) + \sum_{n \in N_2} t_n^k \rho_n^k + \bar{t}_o^k s_o^k \leq l_{max} - (l_{max} - l) v_1^k \quad \forall k \in K, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in N_2} \sum_{j \in N_3} t_{ij} x_{ij}^k + \sum_{n \in N_2} \bar{t}_n^k s_n^k \leq l_{max} - (l_{max} - l) v_2^k \quad \forall k \in K, \tag{12}$$

$$\rho_n^k \geq s_o^k + u_n^k - 1 \quad \forall k \in K, n \in N_2, \tag{13}$$

$$\lambda_e^k \leq \min \left(\sum_{n \in N_e} s_n^k, v_e^k \right) \quad \forall k \in K, e = 1, 2, \tag{14}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \left(\lambda_1^k + \lambda_2^k \right) \geq \gamma \sum_{k \in K} q^k, \tag{15}$$

$$y_n \in Z^+ \quad \forall n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{16}$$

$$i_n \in Z^+ \quad \forall n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{17}$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall i = o, j \in N_2 \ and \ i \in N_2, j \in N_3, \tag{18}$$

$$u_n^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{19}$$

$$v_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, e = 1, 2, \tag{20}$$

$$0 \leq s_n^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in N_2 \cup \{o\}, \tag{21}$$

$$0 \leq \rho_n^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in N_2, \tag{22}$$

$$0 \leq \lambda_e^k \leq 1 \quad \forall k \in K, e = 1, 2. \tag{23}$$

(1)式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフ

ロー費用の合計，第二項はノード上の荷役費用と在庫出庫費用の合計，第三項はノード上の荷役施設費用と在庫施設費用の合計である．(2)式から(4)式はアークに関するフロー保存式であり，始点oを発した品種kの需要のフローがステージ2に含まれるノードを経由して終点d^kに配送されることを表す．フロー変数xが0-1変数であることから，各品種が流れる経路は1本に限定される．(5)式と(6)式はノードに関するフロー保存式である．(5)式は，始点ではすべての品種のフローが存在し，荷役を行うことを表す．(6)式は，ステージ2に含まれるノードnで品種kのフローが通過し，荷役が行われるときの品種荷役変数u_n^kは1となるため左辺の値は2となり，ノードnで荷役が行われないとき左辺の値は0となる．(7)式はノード荷役施設容量の制約式であり，ノード上に荷役施設が配置されるときにノード上の荷役量の合計は荷役施設容量以下であることを表す．(8)式は，品種kの需要がノード上に在庫される比率の合計が1であり，需要がN_1およびN_2に含まれるノードのいずれかに在庫されることを表す．(9)式は在庫施設容量の制約式であり，ノード上に在庫施設が配置されるときにノード上の在庫は在庫施設容量以下であることを表す．(10)式は，ノードn上の品種kの品種荷役変数u_n^kが1のときに限り在庫比率s_n^kが正の値をとることができ，u_n^kが0のときs_n^kが0となることを表す．(11)式と(12)式は配送時間制限に関する式である．(11)式の左辺の第一項は$N_1(o)$とN_2間のアークおよびN_2とN_3間のアーク上の配送時間，第二項はステージ 2における荷役時間，第三項は始点oにおける在庫出庫時間であり，左辺はステージ1に含まれるノードからステージ3に含まれる終点までの配送時間を表す．また，右辺はv_1^kが1のときに配送時間制限lとなり，v_1^kが0のときには最大の配送時間l_{max}となる．(12)式の左辺の第一項はN_2とN_3間のアーク上の配送時間，第二項はステージ2における在庫出庫時間であり，ステージ2に含まれるノードからステージ3に含まれる終点までの配送時間と配送時間制限の関係を表す．(13)式の左辺はノードoから在庫出庫され，ステージ2に含まれるノードnで荷役が行われる需要比率である荷役需要比率変数ρ_n^kである．品種荷役変数u_n^kが1のときρ_n^kは始点の在庫比率s_o^k以上となることを表し，u_n^kが0のとき(22)式と合わせるとρ_n^kは0以上となることを表す．(14)式の左辺は各ステージに含まれるノードにおける品種kの在庫に対して配送時間制限を満足する配送時間制限比率変数λ_e^kであり，λ_e^kはステージeに含まれるノードnの在庫比率変数s_n^kの合計と配送時間制限変数v_e^kの小さい方となる．また，$v_e^k = 0$であれば$\lambda_e^k = 0$となる．なお，品種kの経路は1つであることからステージ2のノードでは高々1つのs_n^kが正となる．(15)式は配送時間制限を満足する需要の需要カバー率の条件を表す式である．左辺は配送時間が配送時間制限を満たす需要の合計であり，右辺は配送時間制限を満たさなければならない需要量である．(16)式と(17)式は変数の非負整数条件，(18)式から(20)式は変数の0-1条件，(21)式から(23)式は変数の0から1までの連続条件である．

4．一般モデルの定式化

ステージ数を e_{max}，最終ステージを除くステージの集合を $E=\{1,\cdots,e_{max}-1\}$ とし，ステージ e に含まれるノード集合を N_e とする．最終ステージ e_{max} に含まれるノードを除くノード集合を $N=\bigcup_{l\in E}N_l$, e_{max} に含まれるノードを含む全ノード集合を $\bar{N}$，ステージ e からステージ $e_{max}-1$ に含まれるノード集合を $\hat{N}_e=\bigcup_{l=e}^{l=e_{max}-1}N_l$ とする．ただし，$\hat{N}_{e_{max}}=\phi$ とする．隣接するステージに含まれるノード間をむすぶアーク集合を $A=\bigcup_{l\in E}(N_l\times N_{l+1})$ とする．また，品種の集合を K，配送時間制限の番号の集合を H，ノード n を始点とするアークの終点であるノード集合を N_n^+，ノード n を終点とするアークの始点であるノード集合を N_n^- とし，非負の整数集合を Z^+ とする．

品種 k は始点 o^k および終点 d^k をもち，需要量 q^k が与えられている．品種 k の需要 q^k はステージ1に含まれる始点 o^k から各ステージに含まれるノードを一箇所づつ経由してステージ e_{max} に含まれる終点 d^k に配送され，その取りうる経路数は1本とする．ノード n が品種 k の始点 o^k であれば -1，終点 d^k であれば1，それ以外であれば0である定数を α_n^k とし，ノード n が品種 k の始点 o^k または終点 d^k であれば1，それ以外であれば0である定数を β_n^k とする．最大の配送時間制限の番号を h_{max} とし，$H=\{1,\cdots,h_{max}\}$ とする．なお，h 番目の配送時間制限を l_h としたとき，$l_{h-1}<l_h(h=2,\cdots,h_{max})$ を満たす．h 番目の配送時間制限を満たす需要の需要カバー率を γ_h とする．ただし，$\gamma_{h-1}<\gamma_h(h=2,\cdots,h_{max})$ とする．一方，ステージ e に含まれるノードにおいて品種 k の在庫が h 番目の配送時間制限を満たすとき1，そうでないとき0である配送時間制限変数を v_{he}^k とする．また，ステージ e に含まれるノードから在庫出庫され，ステージ $e+1$ 以降に含まれるノード n で荷役が行われる需要比率である需要比率変数を ρ_{ne}^k とする．ステージ e におけるノード上の品種 k の在庫が h 番目に対する配送時間制限比率変数を λ_{ne}^k とする．その他の定数および変数は3*IAPL* と同様である．

このとき，アークフローを用いた整数施設変数モデル *IAPL* は次のようになる．

IAPL：

$$minimize \quad \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A}q^k c_{ij}^k x_{ij}^k+\sum_{k\in K}\sum_{n\in N}q^k\left(a_n^k u_n^k+b_n^k s_n^k\right)+\sum_{n\in N}\left(f_n y_n+g_n i_n\right) \tag{24}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+}x_{in}^k-\sum_{j\in N_n^-}x_{nj}^k=\alpha_n^k \quad \forall n\in\bar{N},k\in K, \tag{25}$$

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k + \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = 2\ u_n^k + \beta_n^k \quad \forall n \in \bar{N}, k \in K, \tag{26}$$

$$\sum_{k \in K} q^k u_n^k \leq m_n y_n \quad \forall n \in N, \tag{27}$$

$$u_n^k \leq y_n \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{28}$$

$$\sum_{n \in N} s_n^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{29}$$

$$\sum_{k \in K} q^k s_n^k \leq \bar{m}_n i_n \quad \forall n \in N, \tag{30}$$

$$s_n^k \leq i_n \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{31}$$

$$s_n^k \leq u_n^k \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{32}$$

$$\sum_{(i,j) \in A | i \in \hat{N}_e} t_{ij} x_{ij}^k + \sum_{n \in \hat{N}_{e+1}} t_n^k \rho_{ne}^k + \sum_{n \in N_e} \bar{t}_n^k s_n^k \leq l_{max} - (l_{max} - l_h) v_{he}^k \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{33}$$

$$\rho_{ne}^k \geq \sum_{j \in N_e} s_j^k + u_n^k - 1 \quad \forall k \in K, n \in \hat{N}_{e+1}, e \in E \backslash E_1, \tag{34}$$

$$\lambda_{he}^k \leq \min \left(\sum_{n \in N_e} s_n^k, v_{he}^k \right) \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{35}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \sum_{e \in E} \lambda_{he}^k \geq \gamma_h \sum_{k \in K} q^k \quad \forall h \in H, \tag{36}$$

$$y_n \in Z^+ \quad \forall n \in N, \tag{37}$$

$$i_n \in Z^+ \quad \forall n \in N, \tag{38}$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \tag{39}$$

$$u_n^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{40}$$

$$v_{he}^k \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{41}$$

$$0 \leq s_n^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{42}$$

$$0 \leq \rho_{ne}^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in \hat{N}_{e+1}, e \in E \backslash E_1, \tag{43}$$

$$0 \leq \lambda_{he}^k \leq 1 \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E. \tag{44}$$

(24)式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフロー費用の合計，第二項はノード上の荷役費用と在庫出庫費用の合計，第三項はノード上の施設費用の合計である．(25)式はアークに関するフロー保存式であり，始点を発した品種の需要のフローがいくつかの中継点を経由して終点に達することを表す．アークフロー変数 x が0-1変数であることから，各品種が流れる経路は1本に限定される．(26)式はノードに関するフロー保存式である．当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを経由するとき，左辺は2，β_n^k は0，品種荷役変数 u_n^k は1となる．当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを経由しないとき，左辺は0，β_n^k は0，u_n^k は0となる．また，当該ノードを始点または終点とする品種の場合，左辺は1，β_n^k は1，u_n^k は0となる．このように，当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを経由するときにのみ u_n^k は1となり，それ以外は0となる．(27)式はノード上の荷役容量の制約式であり，ノード上に荷役施設が配置されるときにノード上で荷役量の合計は荷役施設容量以下であることを表す．(28)式は強制制約式であり，ノード上に荷役施設が配置されるときに限り，荷役を行なうことができることを表す．左辺は0または1をとり，右辺は整数値をとることになり，弱い制約式となる．(29)式は，品種 k の需要が在庫される比率の合計が1であり，これは需要がいずれかのノード上に在庫されることを表す．(30)式はノード上の在庫施設容量の制約式であり，ノード上に在庫施設が配置されるときにノード上の在庫量の合計は在庫施設容量以下であることを表す．(31)式は強制制約式であり，ノード上に在庫施設が配置されるときに限り，在庫することができることを表す．左辺は1以下の値，右辺は整数値をとることになり，弱い制約式となる．(32)式は，品種荷役変数 u_n^k が1のときノード n 上の品種 k の在庫比率 s_n^k が1以下となり，u_n^k が0のとき0となることを表す．(33)式は配送時間制限に関する式である．配送時間制約番号 h，品種 k，ステージ e において，左辺の第一項はステージ e に含まれるノードからステージ e_{max} の終点までのアーク上での配送時間，第二項はステージ $e+1$以降のノードにおける荷役時間，第三項はステージ e に含まれるノードにおける在庫出庫時間であり，左辺全体としてステージ e に含まれるノードから

ステージ e_{max} の終点までの配送時間を表す．v_{he}^{k} が1のときに右辺は l_h となり，h 番目の配送時間制限を満足する．また，すべての v_{he}^{k} が0のときに右辺は l_{max} となり，最大の配送時間を満足することを表す．(34)式は，ノード n が含まれるステージの上流のステージ e に含まれるノード上の在庫から出荷された品種 k の需要がノード n で荷役が行われる荷役需要比率変数 ρ_{ne}^{k} に関する式である．品種 k，ステージ $e+1$ 以降のステージに含まれるノード n において，品種荷役変数 u_n^k が1のとき ρ_{ne}^{k} はステージ e に含まれるノード j 上で在庫される需要比率 s_j^k の合計以上となることを表し，u_n^k が0のとき(43)式と合わせると ρ_{ne}^{k} は0以上となることを表す．(35)式の左辺はステージ e に含まれるノードにおける品種 k の在庫に対する h 番目の配送時間制限比率 λ_{he}^{k} であり，λ_{he}^{k} はステージ e に含まれるノードの在庫比率変数 s_n^k の合計と配送時間制限変数 v_{he}^{k} の小さい方となる．なお，$v_{he}^{k}=0$ であれば $\lambda_{he}^{k}=0$ となる．また，品種 k の経路は1つであることから，ステージ e に含まれるノードでは高々1つの s_n^k が正となる．(36)式は配送時間制限を満足する需要の需要カバー率の条件を表す式である．左辺は配送時間が h 番目の配送時間制限を満たす需要の合計であり，右辺は満たさなければならない需要量である．(37)式と(38)式は変数の非負整数条件，(39)式から(41)式は変数の0-1条件，(42)式から(44)式は変数の0から1までの連続条件である．

5．階段状費用モデルの定式化

ノード上の容量に関する費用が容量に対して図3の右図のような階段状に表されるモデルに対して，アークフロー変数を用いた定式化とパスフロー変数を用いた定式化を示す．これらは，配置される施設費用が容量の増加に対して費用の増加量が低減する規模の経済性を考慮したモデルであり，線形であるフロー費用とあわせると費用が区分的線形関数として表されるモデルとなる．

5．1　アークフローモデル

はじめに，アークフロー変数を用いたモデルを示す．ノード n における荷役施設集合を W_n，在庫施設集合を R_n とし，各ノード上には荷役施設と在庫施設のそれぞれ高々一つを配置することができる．ノード n 上に配置される荷役施設 w の荷役施設費用を f_n^w，荷役施設容量を m_n^w とする．ここで，最大の荷役施設容量をもつ施設の番号を w_{max} とし，$m_n^{w-1} < m_n^w\ (w=2, \cdots, w_{max})$ とする．ノード n 上に配置される在庫施設 r の在庫施設費用を g_n^r，在庫施設容量を $\bar{m}_n^r$ とする．ここで，最大の在庫施設容量をもつ施設の番号を r_{max} とし，$\bar{m}_n^{r-1} < \bar{m}_n^r\ (r=2, \cdots, r_{max})$ とする．

ノード n の荷役施設 w で品種 k の需要の荷役が行われるとき1，そうでないとき0である品種荷役施設変数を ζ_n^{kw} とし，ノード n に荷役施設 w が配置されるとき1，そ

うでないとき 0 である荷役施設変数を y_n^w とする．ノード n において，品種 k が在庫される比率を s_n^k，在庫施設 r で在庫される比率である品種在庫施設変数を η_n^{kr} とし，在庫施設 r が配置されるとき 1，そうでないとき 0 である在庫施設変数を i_n^r とする．これら以外の係数，定数および変数は *IAPL* と同様である．

このとき，アークフローを用いた階段状費用モデル *SAPL* は次のようになる．

SAPL：

minimize

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{k\in K}\sum_{n\in N} q^k \left(a_n^k u_n^k + b_n^k s_n^k\right) + \sum_{n\in N}\left(\sum_{w\in W_n} f_n^w y_n^w + \sum_{r\in R_n} g_n^r i_n^r\right) \tag{45}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = \alpha_n^k \quad \forall n\in \bar{N}, k\in K, \tag{46}$$

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k + \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = 2\ u_n^k + \beta_n^k \quad \forall n\in \bar{N}, k\in K, \tag{47}$$

$$u_n^k = \sum_{w\in W_n} \zeta_n^{kw} \quad \forall k\in K, n\in N, \tag{48}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \zeta_n^{kw} \geq m_n^{w-1} y_n^w \quad \forall w\in W_n, n\in N, \tag{49}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \zeta_n^{kw} \leq m_n^{w} y_n^w \quad \forall w\in W_n, n\in N, \tag{50}$$

$$\zeta_n^{kw} \leq y_n^w \quad \forall k\in K, w\in W_n, n\in N, \tag{51}$$

$$\sum_{w\in W_n} y_n^w \leq 1 \quad \forall n\in N, \tag{52}$$

$$s_n^k = \sum_{r\in R_n} \eta_n^{kr} \quad \forall k\in K, n\in N, \tag{53}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \eta_n^{kr} \geq \bar{m}_n^{r-1} i_n^r \quad \forall r\in R_n, n\in N, \tag{54}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \eta_n^{kr} \leq \bar{m}_n^{r} i_n^r \quad \forall r\in R_n, n\in N, \tag{55}$$

$$\eta_n^{kr} \leq i_n^r \quad \forall k\in K, r\in R_n, n\in N, \tag{56}$$

$$\sum_{r\in R_n} i_n^r \leq 1 \quad \forall n \in N, \tag{57}$$

$$\sum_{n\in N} s_n^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{58}$$

$$\sum_{(i,j)\in A|i\in \hat{N}_e} t_{ij}x_{ij}^k + \sum_{n\in \hat{N}_{e+1}} t_n^k \rho_{ne}^k + \sum_{n\in N_e} \bar{t}_n^k s_n^k \leq l_{max} - (l_{max} - l_h)v_{he}^k$$

$$\forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{59}$$

$$\rho_{ne}^k \geq \sum_{j\in N_e} s_j^k + u_n^k - 1 \quad \forall k \in K, n \in \hat{N}_{e+1}, e \in E\backslash E_1, \tag{60}$$

$$\lambda_{he}^k \leq \min\left(\sum_{n\in N_e} s_n^k, v_{he}^k\right) \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{61}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \sum_{e\in E} \lambda_{he}^k \geq \gamma_h \sum_{k\in K} q^k \quad \forall h \in H, \tag{62}$$

$$y_n^w \in Z^+ \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{63}$$

$$i_n^r \in Z^+ \quad \forall r \in R_n, n \in N, \tag{64}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \tag{65}$$

$$u_n^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{66}$$

$$\zeta_n^{kw} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{67}$$

$$v_{he}^k \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{68}$$

$$0 \leq s_n^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{69}$$

$$0 \leq \rho_{ne}^k \leq 1 \quad \forall k \in K, n \in \hat{N}_{e+1}, e \in E\backslash E_1, \tag{70}$$

$$0 \leq \lambda_{he}^k \leq 1 \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{71}$$

$$0 \leq \eta_n^{kr} \leq 1 \quad \forall k \in K, r \in R_n, n \in N. \tag{72}$$

(45)式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフロー費用の合計，第二項はノード上の荷役費用と在庫出庫費用の合計，第三項はノード上の施設費用の合計である．y_n^w と i_n^w は 0-1変数であり，施設費用は施設容量に対する階段状関数となる．(48)式は品種 k のノード n 上で荷役が行われる需要がいずれかの荷役施設 w で行われることを表す．(49)式は 荷役施設容量の下限の制約式であり，荷役施設 w を使用するときにノード n における荷役量の合計が荷役施設 $w-1$の荷役施設容量以上であることを表す．(50)式は荷役施設容量の上限の制約式であり，荷役施設 w を使用するときにノード n における荷役量の合計が荷役施設 w の荷役施設容量以下であることを表す．(51)式は強制制約式であり，荷役施設 w が配置されるときに限り，荷役施設 w で荷役を行うことができることを表す．左辺は 0 または 1 をとり，右辺も 0 または 1 をとることになり，強い制約式となる．(52)式は，ノードに配置される荷役施設が高々 1 種類であることを表す．(53)式は，品種 k のノード n 上で在庫される需要がいずれかの在庫施設 r で在庫されることを表す．(54)式は 在庫施設容量の下限の制約式であり，在庫施設 r を使用するときに在庫量の合計が在庫施設 $r-1$の在庫施設容量以上であることを表す．(55)式は在庫施設容量の上限の制約式であり，在庫施設 r を使用するときに在庫量の合計が在庫施設 r の在庫施設容量以下であることを表す．(56)式は強制制約式であり，ノード上に在庫施設 r が配置されるときに限り，在庫施設 r で在庫することができることを表す．右辺は 0 または 1 をとることになり，強い制約式となる．(57)式は，ノードに配置される在庫施設が高々 1 種類であることを表す．(67)式は変数の 0-1条件，(72)式は変数の 0 から 1 までの連続条件である．

5．2　パスフローモデル

パスフロー変数を用いたモデルを示す．品種 k の取りうるパスの集合を P^k とし，品種 k のパス p を使用するとき 1，そうでないとき 0 であるパスフロー変数を z_p^k とする．また，パス p がアーク (i,j) を含むとき 1，そうでないとき 0 である定数を δ_{ij}^p，パス p がノード n を含むとき 1，そうでないとき 0 である定数を ϵ_n^p とする．

このとき，パスフローモデルを用いた階段状費用モデル *SPPL* は次のようになる．

SPPL：

$$minimize \quad \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A}\sum_{p\in P^k} q^k c_{ij}^k \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{k\in K}\sum_{n\in N} q^k \left(\sum_{p\in P^k} a_n^k \epsilon_n^p z_p^k + b_n^k s_n^k\right) + \sum_{n\in N}\left(\sum_{w\in W_n} f_n^w y_n^w + \sum_{r\in R_n} g_n^r l_n^r\right) \tag{73}$$

subject to

$$(\mu^k) \qquad \sum_{p \in P^k} z_p^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{74}$$

$$(\nu_n^k) \qquad \sum_{p \in P^k} \epsilon_n^p z_p^k = \sum_{w \in W_n} \zeta_n^{kw} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{75}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \zeta_n^{kw} \geq m_n^{w-1} y_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{76}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \zeta_n^{kw} \leq m_n^w y_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{77}$$

$$\zeta_n^{kw} \leq y_n^w \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{78}$$

$$\sum_{w \in W_n} y_n^w \leq 1 \quad \forall n \in N, \tag{79}$$

$$s_n^k = \sum_{r \in R_n} \eta_n^{kr} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{80}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \eta_n^{kr} \geq \bar{m}_n^{r-1} l_n^r \quad \forall r \in R_n, n \in N, \tag{81}$$

$$\sum_{k \in K} q^k \eta_n^{kr} \leq \bar{m}_n^r l_n^r \quad \forall r \in R_n, n \in N, \tag{82}$$

$$\eta_n^{kr} \leq l_n^r \quad \forall k \in K, r \in R_n, n \in N, \tag{83}$$

$$\sum_{r \in R_n} l_n^r \leq 1 \quad \forall n \in N, \tag{84}$$

$$\sum_{n \in N} s_n^k = 1 \quad \forall k \in K, \tag{85}$$

$$(\xi_n^k) \qquad s_n^k \leq \sum_{p \in P^k} \epsilon_n^p z_p^k \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{86}$$

$$(\pi_{he}^k) \qquad \sum_{(i,j) \in A | i \in \hat{N}_e} t_{ij} \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{n \in \hat{N}_{e+1}} t_n^k \rho_{ne}^k + \sum_{n \in N_e} \bar{t}_n^k s_n^k \leq l_{max} - (l_{max} - l_h) v_{he}^k \quad \forall h \in H, k \in K, e \in E, \tag{87}$$

$$\rho_{ne}^k \geq \sum_{j \in N_e} s_j^k + u_n^k - 1 \quad \forall k \in K, n \in \hat{N}_{e+1}, e \in E \backslash E_1, \tag{88}$$

$$\lambda_{he}^{k} \leq \min\left(\sum_{n\in N_e} s_n^k, v_{he}^k\right) \quad \forall h\in H, k\in K, e\in E, \tag{89}$$

$$\sum_{k\in K} q^k \sum_{e\in E} \lambda_{he}^k \geq \gamma_h \sum_{k\in K} q^k \quad \forall h\in H, \tag{90}$$

$$y_n^w \in Z^+ \quad \forall w\in W_n, n\in N, \tag{91}$$

$$l_n^r \in Z^+ \quad \forall r\in R_n, n\in N, \tag{92}$$

$$z_p^k \in \{0,1\} \quad \forall p\in P^k, k\in K, \tag{93}$$

$$\zeta_n^{kw} \in \{0,1\} \quad \forall k\in K, w\in W_n, n\in N, \tag{94}$$

$$v_{he}^k \in \{0,1\} \quad \forall h\in H, k\in K, e\in E, \tag{95}$$

$$0 \leq s_n^k \leq 1 \quad \forall k\in K, n\in N, \tag{96}$$

$$0 \leq \rho_{ne}^k \leq 1 \quad \forall k\in K, n\in \hat{N}_{e+1}, e\in E\backslash E_1, \tag{97}$$

$$0 \leq \lambda_{he}^k \leq 1 \quad \forall h\in H, k\in K, e\in E, \tag{98}$$

$$0 \leq \eta_n^{kr} \leq 1 \quad \forall k\in K, r\in R_n, n\in N. \tag{99}$$

(73)式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフロー費用の合計，第二項はノード上の荷役費用と在庫出庫費用の合計，第三項はノード上の施設費用の合計である．(74)式はフローの保存式であり，パスフロー変数が0-1変数であることから，品種 k の取りうるパス集合 P^k から１本のパスを選択することを表す．(75)式は，品種 k のノード n 上で荷役が行われる需要がいずれかの施設 w 上の荷役施設で行われることを表す．(86)式は，品種 k のパスがノード n を通れば在庫することができ，そうでなければ在庫できないことを表わす．(93)式は変数の0-1条件である．また，左端の変数 μ^k から π_{he}^k はそれぞれの制約式に対する双対変数である．

なお，*IAPL* に対するパスフローによる定式化も可能であるが，ここでは省略する．

５．３　パスフローモデルにおける列生成法

SPPL において0-1変数を連続緩和した問題を *SPPLL* とし，*SPPLL* を解くことを考

える．$SPPLL$ において，パスフロー変数 z は変数の中で最も多い $O(|N|^{|E|})$ 個存在するため，z に対して必要な変数である列を生成する列生成法を使用する．なお，列生成法は線形緩和問題を最適に解くための手法であり，最適解または近似解を求めるためには，別の手法を組み合わせる必要がある．

列生成法は，適当な列であるパス集合からはじめ，適時，基底に入る被約費用が負であるパスフロー変数を生成していく．z_p^k に対する被約費用を τ_p^k とすると，被約費用 τ_p^k は次のようになる．

$$\tau_p^k = \sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p q^k c_{ij}^k + \sum_{h\in H}\sum_{e\in E}\sum_{(i,j)\in A|i\in \hat{N}_e} \delta_{ij}^p t_{ij} \pi_{he}^k + \sum_{n\in N} \epsilon_n^p \left(q^k a_n^k + \nu_n^k - \xi_n^k\right) - \mu^k$$

$$\forall p \in P^k, k \in K. \tag{100}$$

列生成法では，被約費用が負であるパスフロー変数 z_p^k を生成する．(100)式の第一項と第二項の和をアークの重み，第三項をノードの重みとしたネットワークを考える．このネットワーク上で，品種 k の始点と終点間のパスの中で最小の重みのパスを見つけ，そのパスの重みが μ^k 以上であれば被約費用が負であるパスが存在しないことになり，μ^k 未満であれば新たなパスが見つかったことになる．

そのため，品種 k ごとの価格付け問題である次のような品種の始点・終点間の最短経路問題 SP^k を解き，目的関数値が負となるパスフロー変数を求めればよい．なお，ノードをダミーのアークに置き換えることにより，アークに重みをもつ最短経路問題に置き換えることができる．

SP^k：

$$minimize \quad \sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p q^k c_{ij}^k + \sum_{h\in H}\sum_{e\in E}\sum_{(i,j)\in A|i\in \hat{N}_e} \delta_{ij}^p t_{ij} \pi_{he}^k + \sum_{n\in N} \epsilon_n^p \left(q^k a_n^k + \nu_n^k - \xi_n^k\right) \tag{101}$$

$subject\ to$

$$\sum_{p\in P^k} z_p^k = 1, \tag{102}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \tag{103}$$

6．おわりに

本研究では，多品種の需要をもつ多段階の施設・在庫配置問題を対象とし，施設配置

と在庫配置により指定された配送時間制限内に配送できる需要比率を満足するような中間配送拠点の配置とその施設規模，在庫配置とその施設規模を決定するモデルを取り扱った．アークフローを用いた３ステージ・１配送時間制限モデル，アークフローを用いた整数施設変数モデル，アークフローを用いた階段状費用モデル，およびパスフローを用いた階段状費用モデルの定式化を示し，パスフローモデルにおける列生成法を示した．

本研究は，様々な前提や仮定にもとづいた基本的なモデルを対象としている．需要を予測可能と仮定し，需要に基づき施設に在庫を配置している．しかし，本来は様々なデータから需要を予測して，在庫を配置することになるため，予測が外れた場合を考慮した安全在庫や品切れリスクなどをモデルに組み込む必要がある．また，在庫発注モデル，多期間モデルや確率的モデルを考慮する必要もある．加えて，輸送費用，荷役費用や在庫保管費用を取り扱い量の線形としているが，必ずしも線形であるとは限らない．また，顧客への配送を直送としているが，巡回配送として扱うことは定式化においては可能である．しかし，配送区域の設定や巡回路などの要因が加わるため，解析は容易ではない．一方，顧客である最終ステージ以外においても巡回配送するモデルもあるが，すでにサービスネットワークモデルとして研究が行われており，モデルに取り込むことは可能である．

本研究では配送時間制限を考慮した施設・在庫配置問題の定式化を示した．小さなインスタンスの場合には定式化を用いて汎用の最適化ソルバーにより解を求めることが可能と考えられるが，一定サイズ以上のインスタンスの適切な解を実用時間内で求めることは困難である．このため，適切な解を適切な時間で求解できるメタヒューリスティクスやマスヒューリスティクスを開発する必要がある．

参考文献

Boland, N., M. Hewitt, L. Marshall, M. Savelsbergh. 2017. The continuous-time service network design problem. *Operations Research* **65**(5) 1303-1321.

Crainic, T. G., M. Gendreau, B. Gendron, eds. 2021. *Network Design with Applications to Transportation and Logistics*. Springer, Cham.

Hellsten, E., D. F. Koza, I. Contreras, J. F. Cordeau, D. Pisinger. 2021. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research* **136** 105511.

Laporte, G., S. Nickel, F. Saldanha. 2015. *Location Science*. Springer, Cham.

Scherr, Y. O., B. A. Neumann-Saavedra, M. Hewitt, D. C. Mattfeld. 2018. Service network design for same day delivery with mixed autonomous fleets. *Transportation Research Procedia* **30** 23-32.

Wu, H., I. Herszterg, M. Savelsbergh, Y. Huang. 2020. Service network design for same-day delivery with hub capacity constraints. *Optimization Online*.

片山直登．2022．時間制約を考慮した施設配置・ネットワーク設計問題．流通経済大学流通情報学部紀要 **26**(2) 21-42.